

Correction du Devoir Maison n° 1 – Révisions, logique

Exercice 1 – Quelques révisions

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque fixé. Alors la fonction $t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ est continue sur $[0, 1]$ (composées de fonctions continues). Elle est donc intégrable sur $[0, 1]$, et F est bien définie en x . Ainsi, F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) $F(0) = \int_0^1 1 dt = 1$. On admet que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.
(b) On fait une intégration par parties avec les fonctions suivantes dérivables et de dérivées continues sur $[0, 1]$ (*NB : ne pas oublier de rappeler les conditions d'application de la formule d'intégration par parties*) :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad u(t) &= \frac{t}{2}, & u'(t) &= \frac{1}{2} \\ \forall t \in [0, 1], \quad v(t) &= -\frac{1}{1+t^2}, & v'(t) &= \frac{2t}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant I cette intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1).$$

- (c) Exprimons $F(1)$ en fonction de I et de $F(2)$:

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt + \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = F(2) + I.$$

D'après la question précédente, on obtient alors la relation :

$$F(1) = F(2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1), \quad \text{soit :} \quad F(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1).$$

On en déduit la valeur de $F(2)$: $F(2) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

- (d) On adapte le raisonnement précédent. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On exprime $I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ en fonction de $F(n)$ à l'aide d'une intégration par parties portant sur les fonctions u et v suivantes, dérivables de dérivées continues sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad u(t) &= (-1)^{n+1} \frac{t}{2n}, & u'(t) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \\ \forall t \in [0, 1], \quad v(t) &= \frac{(-1)^n}{(1+t^2)^n}, & v'(t) &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \left[-\frac{t}{2n} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n} \right]_0^1 + \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} = -\frac{1}{n \cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{2n}F(n).$$

On exprime ensuite $F(n)$ en fonction de I_n et $F(n+1)$:

$$F(n) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = F(n+1) + I_n.$$

On obtient donc la relation

$$F(n) = F(n+1) - \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{2n} F(n), \quad \text{soit :} \quad F(n+1) = \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n} F(n).$$

Cette relation permet effectivement de calculer $F(n)$ de proche en proche à partir de $F(1)$ (toutes les expressions sont bien définies si $n \in \mathbb{N}^*$). Pour répondre de manière complètement rigoureuse, on peut faire une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence étant : « on peut calculer $F(n)$ ».

- (e) On détermine $F(5)$ grâce aux relations de la question précédente. On détermine pour cela de proche en proche $F(n)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{\pi}{4} \quad (\text{admis}) \\ F(2) &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \\ F(3) &= \frac{1}{16} + \frac{3}{4} F(2) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3\pi}{32} = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32} \\ F(4) &= \frac{1}{48} + \frac{5}{6} F(3) = \frac{1}{48} + \frac{5}{24} + \frac{5\pi}{64} = \frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64} \\ F(5) &= \frac{1}{128} + \frac{7}{8} F(4) = \frac{1}{128} + \frac{77}{384} + \frac{35\pi}{512} = \frac{80}{384} + \frac{35\pi}{512} = \frac{5}{24} + \frac{35\pi}{512}. \end{aligned}$$

3. Soit x et x' deux réels tels que $x \leq x'$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$-x \ln(1+t^2) \geq -x' \ln(1+t^2),$$

puisque $\ln(1+t^2) \geq 0$. L'exponentielle étant croissante, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \quad e^{-x \ln(1+t^2)} \geq e^{-x' \ln(1+t^2)}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, il vient :

$$\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq \int_0^1 e^{-x' \ln(1+t^2)} dt \quad \text{soit :} \quad F(x) \geq F(x').$$

Cela montre la décroissance de F sur $\mathbb{R}$.

4. Étude de F quand x tend vers $-\infty$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Soit f_x la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_x(t) = e^{-x \ln(1+t^2)}$ (remarquez au passage que pour définir une fonction, je ne me contente pas de dire : « soit $f(x) = \dots$ » qui est une rédaction plus que douteuse ; **Ne confondez pas la fonction f et sa valeur $f(t)$ en un point t**).

La fonction f_x est dérivable sur $[0, 1]$, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'_x(t) = \frac{-2xt}{1+t^2} \cdot e^{-x \ln(1+t^2)}.$$

Remarquez que pour décrire une fonction, par exemple une dérivée, je précise bien pour quelles valeurs de la variable je la considère, par l'emploi d'un quantificateur ; ne parlez pas de $f'(t)$ sans avoir dit ce qu'est t !

Ainsi, puisque x est négatif, f'_x est positive sur $[0, 1]$, donc f_x est croissante sur $[0, 1]$.

- (b) Il résulte de la question précédente que pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f_x(t) \geq f_x\left(\frac{1}{2}\right)$. En intégrant cette relation entre $\frac{1}{2}$ et 1, on obtient :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f_x(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 f_x\left(\frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \cdot f_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x \ln \frac{5}{4}}.$$

De plus, f_x étant positive sur $[0, 1]$, on a :

$$F(x) = \int_0^1 f_x(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 f_x(t) dt \geq \frac{1}{2} e^{-x \ln \frac{5}{4}}.$$

Puisque $\ln \frac{5}{4}$ est strictement positif, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x \ln \frac{5}{4}} = +\infty$. D'après le théorème de minoration, F admet une limite en $-\infty$, et cette limite est $+\infty$.

- (c) On considère $x \in \mathbb{R}_-^*$. Alors, en divisant l'ingalité obtenue dans la question précédente par x , on obtient :

$$\frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x \ln \frac{5}{4}}}{x}$$

D'après les résultats de croissance comparée, l'expression de droite tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$. Ainsi, en utilisant le théorème de majoration des limites, $\frac{F(x)}{x}$ admet une limite lorsque x tend vers $-\infty$, et cette limite est $-\infty$.

Graphiquement, cela signifie qu'à l'infini négatif, la tangente est verticale. En particulier, il n'y a pas de droite asymptote en $-\infty$.

5. Étude de F quand x tend vers $+\infty$

- (a) On effectue une étude de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], g(t) = \ln(1 + t^2) - \frac{t^2}{2}.$$

En tant que composée et somme de fonctions dérivables, g est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$\forall t \in [0, 1], g'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - t = \frac{2t - t - t^3}{1+t^2} = \frac{t - t^3}{1+t^2}.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $t^3 \leq t$, donc $g'(t) \geq 0$. La fonction g est donc croissante sur $[0, 1]$. Puisque $g(0) = 0$, on en conclut qu'elle est positive sur $[0, 1]$, puis que : $\forall t \in [0, 1], \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t^2)$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Puisque $-x$ est négatif, et que l'exponentielle est croissante, l'inégalité de la question précédente amène l'inégalité suivante :

$$\forall t \in [0, 1], e^{-x \ln(1+t^2)} \leq e^{-\frac{x t^2}{2}}.$$

Intégrons cette inégalité entre 0 et 1. On obtient, d'après la propriété de croissance de l'intégrale :

$$F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{x t^2}{2}} dt.$$

- (c) Soit $x \in [1, +\infty[$. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(t) = e^{-\frac{x t^2}{2}}$. La fonction h est dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée :

$$\forall t \in [0, 1], h'(t) = -x t \cdot e^{-\frac{x t^2}{2}}.$$

Ainsi, h' est négative sur $[0, 1]$ et h est décroissante sur $[0, 1]$.

- (d) Désolé pour l'erreur qui empêchait totalement de répondre à la question : il fallait considérer $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, et non $\sqrt[3]{x}$.

- D'une part, pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]$: $0 \leq e^{-\frac{x t^2}{2}} \leq 1$. Intégrons cette encadrement entre 0 et $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$:

$$0 \leq \int_0^{1/\sqrt[3]{x}} e^{-\frac{x t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), cette intégrale admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{1/\sqrt[3]{x}} e^{-\frac{x t^2}{2}} dt = 0.$$

- D'autre part pour tout $t \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, 1 \right]$, puisque h est décroissante,

$$0 \leq h(t) \leq h\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = e^{-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}}.$$

Intégrons cet encadrement entre $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ et 1. On obtient :

$$0 \leq \int_{1/\sqrt[3]{x}}^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) e^{-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}} \leq e^{-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}}.$$

L'expression de droite tendant vers 0 en $+\infty$, on conclut encore une fois à l'aide du théorème d'encadrement que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1/\sqrt[3]{x}}^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt = 0.$$

Or, d'après la relation de Chasles,

$$\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt = \int_0^{1/\sqrt[3]{x}} e^{-\frac{xt^2}{2}} dt + \int_{1/\sqrt[3]{x}}^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt.$$

L'intégrale $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$ étant la somme de deux expressions de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$, elle est aussi de limite nulle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt = 0$$

On peut enfin conclure que F admet une limite en $+\infty$, et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, grâce au théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement :

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt.$$

Exercice 2 – Négations logiques

1. $\neg((A \vee B) \implies C) \implies (D \wedge E) \equiv ((A \vee B) \implies C) \wedge (\neg D \vee \neg E)$
2. On a la succession suivante d'assertions équivalentes :

$$\begin{aligned} \neg((A \implies B) \iff (A \implies \neg C)) &\equiv (\neg(A \implies B)) \iff (A \implies \neg C) \\ &\equiv (A \wedge \neg B) \iff (A \implies \neg C) \end{aligned}$$

Il est possible d'obtenir des expressions équivalentes, par exemple en niant $A \implies \neg C$ plutôt que $A \implies B$.

3. $\neg(\forall x \in E, \exists y \in E, A(x, y) \vee B(x)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in E, \neg A(x, y) \wedge \neg B(x)$;
4. On a la succession suivante d'assertions équivalentes :

$$\begin{aligned} (\exists x \in E, A(x)) \implies (\forall x \in E, A(x)) &\equiv (\forall x \in E, A(x)) \wedge \neg \exists x \in E, A(x) \\ &\equiv (\forall x \in E, A(x)) \wedge (\forall x \in E, \neg A(x)); \end{aligned}$$

5. En l'absence de parenthésage, le quantificateur $\exists x \in E$ est en dehors de l'équivalence. Ainsi :

$$\begin{aligned} \neg(\exists x \in E, A \iff (\exists y \in E, A(x, y) \wedge B(y))) &\equiv \forall x \in E, \neg(A \iff (\exists y \in E, A(x, y) \wedge B(y))) \\ &\equiv \forall x \in E, (\neg A) \iff (\exists y \in E, A(x, y) \wedge B(y)). \end{aligned}$$

Je rappelle que la négation de $A \iff B$ est $A \iff (\neg B)$, ou, de manière équivalente, $\neg A \iff B$. Autant nier de A ou B celui qui est le plus facile à nier !

6. Essayons d'abord de formaliser l'unicité en n'utilisant que des quantificateurs $\exists$ et $\forall$, qu'on sait bien nier. Dire qu'il existe un unique x revient à dire que :
- il existe un x ;
 - il n'en existe pas plusieurs, autrement dit, si $A(x) = A(y)$, alors $x = y$.
- Ainsi, $\exists! x, A(x) \equiv (\exists x, A(x)) \wedge (\forall x \forall y, (A(x) = A(y)) \implies (x = y))$.
- Nions cette expression. On obtient :

$$(\forall x, \neg A(x)) \vee (\exists x \exists y, (x \neq y) \wedge (A(x) = A(y))).$$

Exercice 3 – Jeux logiques et mathématiques

(extrait de *Quel est le titre de ce livre ?* de R. Smullyan ; voir aussi *Le livre qui rend fou* du même auteur)

1. L'archipel – À la recherche de l'île de Maya

(a) La première île

A ne peut pas être un Pur, sinon, il dirait vrai, et B serait un Pur. B dirait donc la vérité, et A serait un Pire, d'où une contradiction.

Ainsi, A est un Pire. Il ment, et par conséquent, B est un Pire ou ce n'est pas l'île de Maya.

Supposons maintenant que ce soit l'île de Maya. D'après ce qui précède, puisque A ment, B est alors un Pire, et en niant son assertion, soit A est un Pur (ce qui n'est pas vrai), soit ce n'est pas l'île de Maya. Ainsi, on arrive à une contradiction : ce n'est pas l'île de Maya.

En passant, on a obtenu que A et B mentent tous les deux, et sont donc deux Pires.

(b) La deuxième île

A ne peut pas être Pur, sinon son affirmation serait clairement erronée alors qu'il serait censé dire la vérité. A est donc Pire. Nions son affirmation : soit A et B ne sont pas tous les deux Pires (donc B est Pur), soit ce n'est pas l'île de Maya.

De plus, A disant faux, l'affirmation de B est fausse, donc B est Pire. Il en résulte que ce n'est pas l'île de Maya.

(c) La troisième île

Si A est Pur, son affirmation est vraie, donc celle de B aussi. Ainsi B est Pur, ce qui contredit A. Ainsi, A ne peut pas être Pur.

A ment donc, et par conséquent B aussi. A et B sont donc Pires tous les deux. Pour que l'affirmation de A soit fausse, il faut donc que ce ne soit pas l'île de Maya.

(d) La quatrième île

A ne peut pas être Pur, sinon il dirait la vérité et serait Pire (contradiction flagrante!). A est donc Pire. Ainsi, soit A et B ne sont pas Pires tous les deux (donc B est Pur), soit ce n'est pas l'île de Maya.

Supposons qu'il s'agisse de l'île de Maya. Alors B est Pur, et dit donc la vérité : en particulier, ce n'est pas l'île de Maya : contradiction !

Donc, il ne peut pas s'agir de l'île de Maya. En passant, on a montré que A est Pire et B est Pur.

(e) La cinquième île

Pour la même raison, A est Pire, et soit B est Pur, soit ce n'est pas l'île de Maya. Le même raisonnement que précédemment donne que si c'est l'île de Maya, B est Pur et contredit le fait que c'est l'île de Maya. Ainsi, ce n'est pas l'île de Maya. Comme avant A est Pire et B est Pur.

(f) La sixième île

Si A est un Pire, alors, en niant son affirmation, on obtient : B est Pire et ce n'est pas l'île de Maya. Dans ce cas, B étant Pire, A est Pur (contradiction) et ce n'est pas l'île de Maya. Ainsi A ne peut pas être Pire.

A étant Pur, il dit la vérité. Supposons que ce ne soit pas l'île de Maya. Dans ce cas, B doit être Pur. L'affirmation de B est donc juste, et comme A n'est pas Pire, c'est l'île de Maya, d'où une contradiction!

Ainsi, il s'agit bien cette fois de l'île de Maya. De plus A et B sont Purs tous les deux.

(g) **La carte de Baal**

Erratum : C dit : A et B ne sont pas deux Pires.

E ne peut pas être Pire, car sinon, la première clause de son affirmation serait correcte, et il dirait la vérité. Donc E est Pur. Ainsi, puisqu'il dit la vérité, C et D sont de même espèce.

Si C est Pire, A et B sont tous les deux Pires, et D dit donc vrai et est donc Pur, ce qui contredit le fait que C et D sont de même espèce.

Ainsi, C et D sont Purs. Supposons que A soit Pur. Alors, pour que D dise la vérité, il faut que B soit Pur aussi. Ainsi, X et Y sont toutes les deux les bonnes cartes, ce qui contredit l'unicité de la bonne carte.

A est donc Pire, et puisque A et B ne sont pas tous les deux Pires, B est Pur, puis Y est la bonne carte.

2. **L'île de Baal – À la découverte de la Vérité Vraie**

(a) Si l'individu est Pire, ce qu'il dit est correct, ce qui ne peut être. Ainsi, il est Pur. Ce qu'il dit étant vrai, et la première clause étant fausse, la seconde doit être vraie : c'est un singe Pur.

(b) L'individu ne peut pas être Pur, car ce qu'il dit serait alors faux. Ainsi, il est Pire. En niant son affirmation : c'est un Pur (ce qui est faux), ou c'est un humain. Ainsi, c'est un humain Pire.

(c) L'individu n'est pas un singe. En effet, sinon, s'il est Pur, son affirmation est fausse, et s'il est Pire, son affirmation est vraie, ce qui ne peut être!

L'individu est donc humain, et ce qu'il dit ne peut donc qu'être vrai : il est Pur.

(d) B est forcément Pur, car s'il était Pire, ce qu'il dit serait correct, ce qui est impossible. Ainsi, B étant Pur, il dit vrai, et A est Pire : ce qu'il dit est faux. Par conséquent A et B sont deux humains.

(e) B ne peut pas être Pur, sinon son affirmation serait clairement fausse! Ainsi B est Pire. Ce qu'il dit étant faux, A est Pur. Ainsi A et B sont deux singes.

(f) Si B est Pur, alors A aussi, et comme il dit la vérité, B est Pire. D'où la contradiction. Ainsi B est Pire, et par conséquent A aussi. Puisque sa première affirmation est fausse, alors que B est effectivement Pire, on déduit que B est un humain. Puisque sa seconde assertion est fausse, A est un singe.

(g) H exprime une implication du type $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Si H est Pire, alors $\mathcal{Q}$ est faux et $\mathcal{P}$ est vrai (négation d'une implication). Mais $\mathcal{P}$ est clairement faux dans ce cas, d'où une contradiction. Donc H est Pur. Étudions la véracité de l'affirmation de G. Si C est Pur, alors A et B sont Purs, donc X est une bonne porte, et il y en a une autre : Y ou Z. Ainsi, soit X et Y sont deux bonnes portes, soit X et Z sont deux bonnes portes. Par conséquent, soit D soit E dit la vérité, et F dit donc vrai. On a montré que si C est Pur, alors F aussi. Ainsi, G dit vrai, et est donc Pur.

G et H étant Purs, l'affirmation de H implique que A est Pur, et donc X est une bonne porte.

Remarquez qu'au final, on n'a pas montré que Y ou Z est une autre bonne porte : C et F peuvent tous les deux être Pire sans que cela n'amène de contradiction.

(h) Le premier prêtre ne peut pas être Pur, sinon il mentirait. Ainsi, il est Pire. Ce qu'il dit est faux. La première assertion étant vraie (il est Pire), on en conclut qu'il sait pourquoi il y a quelque chose au lieu de rien. Au moins le premier prêtre connaît la réponse.

(i) **La réponse !** Attention, il pourrait aussi s'agir du deuxième prêtre. Cependant, si le deuxième prêtre connaît la réponse, alors il ment, et il est donc Pire. Dans tous les cas (que seul le premier prêtre connaisse la réponse, ou que les deux la connaissent), le prêtre répondant à la question est un Pire. Ainsi, sa réponse est fausse. La vraie réponse est donc : « il n'y a rien ». Ainsi, le monde n'est qu'illusion! On a le droit d'être d'accord ou pas avec cette conclusion!