Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Janvier 2006

Correction du Devoir Maison n° 12 –
Étude de la descendance d'un individu

Partie préliminaire

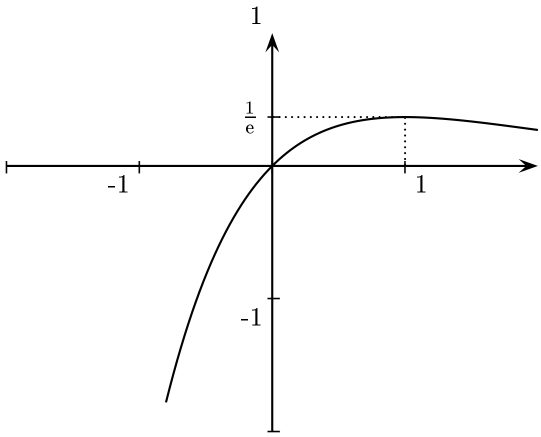
Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, g' est croissante sur $]-\infty,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1, égal à $g(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$, et par ailleurs $f(0) = 0$. Ainsi, on obtient le graphe suivant :



(b) Soit h la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $h(x) = f(x) - x = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} - x$. La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall x \in [0,1], \quad h'(x) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda(x-1)} - 1.$$

Ainsi, $h'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\lambda\mathrm{e}^{\lambda(x-1)} \geqslant 1$ donc si et seulement si $x - 1 \geqslant \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda}$ donc si et seulement si $x \geqslant 1 - \frac{\ln\lambda}{\lambda}$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1], \quad h'(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\mathrm{e}} - 1$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$1 - \frac{\ln\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{\lambda}(1+\ln\lambda) - 1$	↗ $+\infty$

On constate maintenant que $h(1) = 0$. Ainsi, le minimum de h est négatif. Il est strictement négatif si $\lambda \neq 1$. Ainsi, dans ce cas, h admet deux racines dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection appliquée une première fois sur l'intervalle $]-\infty, 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda}[$ et une deuxième fois sur $]1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda}[$. Une de ces racines est 1, donc dans $[0, 1]$. Déterminons à quelle condition la seconde racine est aussi élément de $[0, 1]$. C'est le cas si le minimum de h est atteint en une valeur plus petite que 1 et que $h(0) \geqslant 0$, donc si $\lambda > 1$, la condition sur $h(0)$ étant toujours vérifiée puisque $h(0) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ainsi :

- si $\lambda > 1$, h admet deux racines dans $[0, 1]$,
- si $\lambda \leqslant 1$, h n'admet qu'une racine, égale à 1.

On désigne désormais par ℓ la plus petite solution dans $[0,1]$ de l'équation $f(x) = x$

2. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle stable $\mathbb{R}_+$. De plus $u_1 = \mathrm{e}^{-\lambda} > u_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_{n-1} < u_n$. Alors, en appliquant la fonction f strictement croissante, $f(u_{n-1}) < f(u_n)$, donc $u_n < u_{n+1}$. Par conséquent, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

   De plus $u_0 < \ell$. Soit n tel que $u_n < \ell$. Alors, f étant strictement croissante, $u_{n+1} = f(u_n) < f(\ell) = \ell$. Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.

   Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée, donc convergente. De plus, en passant à la limite dans la relation de récurrence, du fait que f est continue (à ne pas oublier !), elle converge vers un point fixe de f. Si $\lambda = 1$, il n'y a qu'un point fixe, ℓ, donc f tend vers ℓ. Sinon, soit ℓ' le deuxième point fixe. Par définition, $\ell' > \ell$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell' - u_n > \ell' - \ell > 0$, donc $(|u_n - \ell'|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

3. Soit $\alpha > 0$ Par définition des limites, il existe $n_\alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_\alpha, \ell - \alpha < x_n < \ell + \alpha$, donc en particulier $\ell < x_n + \alpha$. De plus, (x_n) étant strictement croissante de limite ℓ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < \ell$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_\alpha$,
$$x_n < \ell < x_n + \alpha.$$
   Si $\ell = 1$, l'expression à démontrer ensuite n'a pas de sens (ou plutôt est toujours vérifiée, le quantificateur portant sur un ensemble vide).

   Supposons maintenant que $\ell < 1$, et soit $\alpha \in]0, 1 - \ell[$. Alors pour tout $n \geqslant n_a$, $\ell < u_n + \alpha < 1$. Sur l'intervalle $]\ell, 1[$, h est strictement négative, donc
$$\forall n \geqslant n_\alpha, \quad h(x_n + \alpha) < 0, \qquad \text{soit:} \qquad f(x_n + \alpha) - (x_n + \alpha) < 0.$$

4. On prend $\alpha = 10^{-6}$. Tant que $x_n + \alpha \leqslant \ell$, on a $f(x_n + \alpha) \geqslant x_n + \alpha$. Ainsi, dès que l'on obtient $f(x_n + \alpha) < x_n + \alpha$ (et d'après la question précédente, cela va finir par être le cas), on a : $u_n < \ell < u_n + \alpha$. Ainsi, u_n donnera une valeur approchée à 10^{-6}. Pour être rigoureux, à cause des erreurs d'arrondi, pour être sûr d'obtenir à l'affichage une valeur approchée à 10^{-6} de ℓ, il faudrait prendre α un peu plus petit ; on néglige cette erreur.

   On écrit un programme en Pascal.

```
program dm13;

const alpha=0.000001;
var lambda,y:real;

function f(x:real):real;
begin
  f:=exp(lambda*(x-1));
end;
```

```
begin
  writeln('Entrez la valeur de lambda: ');
  readln(lambda);
  if lambda<0
  then
    write('Valeur erronée');
  else
    if lambda <=1
    then
      writeln{'La valeur exacte de l est 1'}
    else
      begin
        u:=0;
        repeat
          u:=f(u);
          y:=u+alpha;
        until
          f(y)-y<0;
        writeln('Une valeur approchée à 10^-6 de l est: ',u);
      end;
end.
```

On trouve $\ell = 0.203188$ *si* $\lambda = 2$ *;* $\ell = 0.059520$ *si* $\lambda = 3$ *;* $\ell = 0.006977$ *si* $\lambda = 5$.
D'autre part, si $\lambda \leqslant 1$*, on a déjà vu que* $\ell = 1$.

Partie I – Nombre moyen de descendants

1. (a) Par définition, $X_1 = X$, donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On donne l'expression de la loi :

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\quad P(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors, si $[X_n = p]$ est réalisé, alors X_{n+1} est égal à la somme du nombre de descendants de première génération de chacun des p descendants de n-ième génération. Ainsi, c'est par hypothèse la somme de p variables *mutuellement indépendantes* suivant toutes la même loi que X :

$$(X_{n+1} \mid X_n = p) = Y_1 + \cdots + Y_p,$$

   où les Y_i, $i \in [\![1,p]\!]$, sont mutuellement indépendantes, et où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Par stabilité des lois de Poisson, on en déduit que

$$(X_{n+1} \mid X_n = p) \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda) \qquad \text{soit:} \qquad \forall k \in \mathbb{N},\quad P(X_{n+1} = k \mid X_n = p) = \mathrm{e}^{p\lambda} \cdot \frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$

2. **Nombre moyen de descendants à la n-ième génération d'un individu**

   (a) Il faudrait rajouter une question dans l'énoncé : la justification de la convergence de cette série G_Y, pour toute variable aléatoire Y. Collons-nous y.

   Soit Y une variable aléatoire. Tout d'abord, la série définissant G_Y est à termes positifs, pour tout $x \in [0,1]$. D'autre part :

$$\forall x \in [0,1],\quad 0 \leqslant P(Y = k)x^k \leqslant P(Y = k),$$

et par définition d'une variable aléatoire, $\sum P(Y=k)$ converge, de somme égale à 1. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum P(Y=k)x^k$ converge.

Calculons G_X. C'est la série génératrice de la loi de Poisson :

$$\forall x \in [0,1], \quad G_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit une relation de récurrence entre $G_{X_{n+1}}$ et G_{X_n}, en utilisant la loi conditionnelle trouvée précédemment. D'apèrs la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X_n = p])_{p\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1}=k) &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_{n+1}=k \mid X_n = p)P(X_n=p) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} P(X_n = p)\end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la série génératrice de X_{n+1} :

$$\forall x \in [0,1], \quad G_{X_{n+1}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1}=k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} P(X_n=p)x^k.$$

Comme cette série est absolument convergente (elle converge d'après ce qu'on a fait précédemment, et elle est à termes positifs), on peut inverser les deux sommes, et :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \quad G_{X_{n+1}}(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} P(X_n=p)x^k. \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_n=p)\mathrm{e}^{\lambda p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p x)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_n=p)\mathrm{e}^{\lambda p}\mathrm{e}^{\lambda p x} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} P(X_n=p)(\mathrm{e}^{\lambda(x-1)})^p = G_{X_n}(\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}) = G_{X_n} \circ G_X(x).\end{aligned}$$

(b) On admet que la série définissant G_Y est dérivable terme à terme sur $[0,1]$. Alors, étant donné $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad G'_{X_n} = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X_n=k)x^{k-1} \qquad \text{donc:} \qquad E(X_n) = G'_{X_n}(1).$$

De même, $E(X_{n+1}) = G'_{X_{n+1}}(1)$. Or, la relation de la question précédente entre G_{X_n} et $G_{X_{n+1}}$ permet de trouver une relation sur leur dérivée. La dérivabilité n'étant pas à justifier d'après l'énoncé, on obtient :

$$\forall x \in [0,1], \; G'_{X_{n+1}}(x) = G'_X(x)G'_{X_n} \circ G_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} G'_{X_n}(\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}).$$

En particulier :

$$E(X_{n+1}) = G'_{X_{n+1}}(1) = \lambda G'_{X_n}(1) = \lambda E_(X_n).$$

(c) On déduit de la question précédente que $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison λ, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = \lambda^{n-1}E(X_1) = \lambda^{n-1}\lambda = \lambda^n.$$

Ainsi :

- si $\lambda < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = 0$ (la descendance a tendance à s'éteindre),
- si $\lambda = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = 1$ (la population est stable),
- si $\lambda > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$ (la descendance s'accroît de manière exponentielle).

Partie II – De la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu

Je rétablis la numérotation correcte des questions ; vous ferez la bijection.

1. (a) u_1 est la probabilité que la descendance s'éteigne à la première génération, donc que l'individu n'ai pas d'enfants. Donc :

$$u_1 = P(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = f(0) = f(u_0).$$

(b) Supposons que l'individu a exactement k enfants. Notons $Y_1, \dots, Y_k$ le nombre d'enfants de chacun de ces enfants. Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et ces variables sont indépendantes, par conséquent :

$$P(X_2 = 0 \mid X_1 = k) = P(Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_k = 0) = P(Y_1 = 0) \cdots P(Y_k = 0) = (\mathrm{e}^{-\lambda})^k = \mathrm{e}^{-\lambda k}.$$

On en déduit la valeur de u_2 à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au sysème complet $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} u_2 = P(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_2 = 0 \mid X_1 = k) P(X_1 = k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^{\lambda})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{\lambda}} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\lambda} - 1)} = f(\mathrm{e}^{\lambda}) = f(u_1). \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors, si on suppose que l'individu a k enfant et qu'on note $Y_1, \dots, Y_k$ le nombre de descendants de n-ième génération de chacun de ces enfants, les variables Y_i sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi que X_n. Ainsi :

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) = P(Y_1 = 0, \dots, Y_k = 0) = P(Y_1 = 0) \cdots P(Y_k = 0) = P(X_n = 0)^k = u_n^k.$$

Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$u_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = 0 \mid X_1 = k) P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^k \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda u_n} = f(u_n).$$

Remarquez qu'on n'a pas besoin de raisonnements aussi compliqués pour parvenir à ce résultat. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0) = G_{X_n}(0)$. Or, d'après la relation de récurrence trouvée pour G_{X_n}, et d'après la valeur de G_X, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_{X_n} = f^n$, où la puissance f^n désigne la *composition itérée* de n fonctions égales à f. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = f^{n+1}(0) = f(f^n(0)) = f(u_n).$$

Cela me semble un peu plus rapide et plus élégant (mais ça, c'est une appréciation personnelle).

3. La probabilité d'extinction de la descendance est la probabilité de l'union des événements $[X_n = 0]$, $n :\in \mathbb{N}^*$. Ces événements formant une suite croissante, on obtient, d'après la propriété des limites monotones :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X_n = 0]\right) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell,$$

où ℓ est la limite déterminée dans la partie 1. Ainsi, si on note p_λ la probabilité d'extinction :
- $p_5 \simeq 0.006977$;
- $p_3 \simeq 0.059520$;
- $p_2 \simeq 0.203188$;
- si $\lambda \leqslant 1$, $p_\lambda = 1$ (la descendance s'éteint presque sûrement).

Partie III – Du nombre moyen de générations de la descendance d'un individu

1. (a) L'événement $[D > n]$ est réalisé si et seulement si l'individu a des descendants de $n+1$-ième génération (la descendance ne s'arrête pas lors d'une génération 1 à n), donc si $[X_{n+1} \neq 0]$. Ainsi,

$$P(D > n) = P(X_{n+1} \neq 0) = 1 - P(X_{n+1} = 0) = 1 - u_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(D = n) = P([D > n-1] \setminus [D > n]) = P(D > n-1) - P(D > n) \\ = 1 - u_n - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

(b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(D = k) = \sum_{k=0}^{n}(ku_{k+1} - ku_k) = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k - \sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} -u_k + nu_{n+1} = S_n + n(u_{n+1} - 1).$$

(c) Pour montrer que D est une variable aléatoire, il faut vérifier que la somme des probabilités est 1. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} P(D = k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1}.$$

Ainsi, d'après la partie 1, la série converge, et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(D = k) = \ell$.

Par conséquent, D est une variable aléatoire si et seulement si $\ell = 1$, donc si $\lambda \leqslant 1$.

2. *On suppose dans cette question que* $\lambda = 1$.

(a) On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{v_n}.$$

Puisque $\lambda = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - f(u_n) = 1 - f(1 - v_n) = g(v_n), \text{ où } g : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+1} - w_n = \frac{1}{g(v_n)} - \frac{1}{v_n}.$$

De plus, contournons un argument de développement limité à l'aide de la série exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - \mathrm{e}^{-v_n} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-v_n)^k}{k!} = v_n - \frac{v_n^2}{2} + v_n^3 \left(\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-v_n)^{k-3}}{k!} \right)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant 1$, donc

$$\left| \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-v_n)^{k-3}}{k!} \right| \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{v_n^{k-3}}{k!} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \mathrm{e}.$$

On en déduit que $1 - \mathrm{e}^{v_n} = v_n - \frac{v_n^2}{2} + O(v_n^3)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{v_n}} = \frac{1}{v_n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_n}{2} + O(v_n^2)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{v_n} \left(\left(1 - \frac{v_n}{2} + O(v_n^2)\right)^{-1} - 1 \right).$$

Comme $-\frac{v_n}{2} + O(v_n^2)$ tend vers 0 lorsque n tend vers 0, on connaît un équivalent de cette expression de la forme $(1-a_n)^\alpha - 1$:

$$w_{n+1} - w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}\left(\frac{v_n}{2} - O(v_n^2)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2}$. Ouf!

(b) Encore une question délicate. Il faut utiliser ici le théorème de Cesaro, qui n'est pas explicitement au programme :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite, égale à ℓ.

Démontrons pour commencer ce résultat dans le cas où $\ell = 0$. Alors, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $|a_n| < \varepsilon$. Soit une telle valeur de N. Alors pour tout $n > N$,

$$|b_n| = \left|\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\right| \leqslant \frac{|u_1 + \cdots + u_N| + |u_{N+1}| + \cdots + |u_n|}{n} < \frac{|u_1 + \cdots + u_N|}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_1 + \cdots + u_N|}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-N)\varepsilon}{n} = \varepsilon$. Ainsi, par définition des limites, il existe $N' \geqslant N$ tel que pour tout $n > N'$,

$$\frac{|u_1 + \cdots + u_N|}{n} < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{(n-N)\varepsilon}{n} < 2\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n > N'$, $|b_n| < 3\varepsilon$. On en déduit que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Étudions maintenant le cas général. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a'_n = a_n - \ell$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a'_n = 0$ et par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a'_1 + \cdots + a'_n}{n} = 0 \qquad \text{soit:} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n - n\ell}{n} = 0.$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \ell$.

On applique le théorème de Cesaro à la suite $(w_n - w_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi :

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k - w_{k-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n - w_0}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{n}.$$

Ainsi, $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$, donc $1 - u_n = v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

(c) $\sum \frac{2}{n}$ diverge, et est à termes positifs. D'après la règle des équivalents, $\sum(1-u_n)$ diverge. Ainsi, d'après la question 1b, D n'admet pas d'espérance.

3. *On suppose dans cette question que* $\lambda < 1$.

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$. On a donc :

$$\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \lambda.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(1) - f(u_n)| \leqslant \left|\int_{u_n}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{u_n}^{1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{u_n}^{1} \lambda\,\mathrm{d}x = \lambda(1-u_n).$$

Pr conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 - u_{n+1} \leqslant \lambda(1-u_n).$$

Il en résulte, par une récurrence immédiate, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 - u_n \leqslant \lambda^n(1-u_0) = \lambda^n.$$

(b) Ainsi, $\sum 1-u_n$ et $\sum \lambda^n$ étant à termes positifs, et $\sum \lambda^n$ étant convergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs amène la convergence de $\sum 1-u_n$. Cela prouve la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La majoration de $1-u_n$ donne également une majoration de $|S-S_n|$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S-S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1-u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |1-u_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n(u_{n+1}-1)| \leqslant n\lambda^n \leqslant \mathrm{e}^{nln\lambda+\ln n}$. Comme $\ln\lambda < 0$, cette expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (croissances comparées). Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} n(u_{n+1}-1) = 0.$$

On déduit, des questions 1b et 3b, que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} kP(D=k)\right)$ admet une limite. Ainsi, la série $\sum kP(D=k)$ est convergente, et comme elle est à termes positifs, elle est absolument convergente. Cela prouve l'existence de l'espérance de D.

(d) D'après la question 3b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la question 1b donne une valeur approchée de $E(D)$ avec une marge d'erreur de $\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$. On obtient donc une condition d'arrêt. On s'arrête dès que $\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} < 10^{-6}$, donc $n+1 > \frac{\ln((1-\lambda)10^{-6})}{\ln\lambda}$. Cela donne une condition d'arrêt explicite (on connaît à l'avance le rang d'arrêt), on peut donc utiliser une boucle for.

Je me contente d'écrire une fonction, en supposant que la fonction f a été déclarée telle que plus haut. Je fais rentrer lambda en paramètre de la fonction. Cette fonction renvoie la valeur approchée recherchée. Ainsi :

```
function esperance(lambda: real):real;
var k,n:integer;
    u,S:real;
  begin
    S:=1
    u:=0
    n:=trunc(ln(0.000001*(1-lambda))/ln(lambda));
    for k:=1 to n do
      begin
        u:= f(u);
S:=S+1-u;
      end;
    esperance:= S+n*(f(u)-1);
  end;
```

En faisant tourner ce programme on obtient
- $E(D) = 0.740535$ si $\lambda = \frac{1}{2}$;
- $E(D) = 1.622358$ si $\lambda = \frac{3}{4}$;
- $E(D) = 2.997454$ si $\lambda = \frac{9}{10}$,

modulo les erreurs eventuelles d'arrondi que j'ai négligé (pour en tenir compte, il faudrait faire les calculs avec une précision plus importante, pour se laisser une marge d'erreur).

Nous donnons les valeurs de n correspondantes :
- si $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = 20$;
- si $\lambda = \frac{3}{4}$, $n = 52$;
- si $\lambda = \frac{9}{10}$, $n = 152$.