Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Février 2006

Devoir Maison n° 14

Problème 1 – Où l'on retrouve un dénommé Tchebychev

Partie I – Polynômes de Tchebychev de première espèce

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = X \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. (a) On montre par récurrence sur n que T_n est un polynôme et que son degré est n.
L'initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$ est immédiate. Soit $n \in n \in \mathbb{N}$ tel que T_n et T_{n+1} soient deux polynômes de degrés n et $n+1$. Alors $2XT_{n+1}$ est un polynôme de degré $n+2$, et T_n est un polynôme de degré n. En les soustrayant, on obtient bien un polynôme, et son degré est le maximum des deux degrés, puisque ces deux degrés sont distincts. Ainsi, P_{n+2} est un polynôme de degré $n+2$.
D'après le principe de récurrence, T_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ un polynôme de degré n.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de la même parité que l'entier n.
C'est vrai pour T_0 et T_1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que T_n et T_{n+1} soient respectivement de la même parité que n et $n+1$. Alors T_n est de la même parité que $n+2$, et $2XT_{n+1}$ est de parité opposée à celle de $n+1$, c'est-à-dire de même parité que $n+2$. Leur différence T_{n+2} est donc de même parité que $n+2$.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de même parité que n.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n le coefficient dominant de P_n. Alors, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et l'identification des monômes de degré $n+1$ dans la relation de récurrence donne $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 2^{n-1}$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n(1)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décrite par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1, \qquad \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

Une récurrence immédiate donne : $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = P_n(-1)$. Alors, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

$$v_0 = 1, \qquad v_1 = -1, \qquad \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = -2u_n - u_{n-1}.$$

Soit on voit directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n$ (à démontrer par récurrence), soit on utilise l'équation caractéristique de cette relation de récurrence : $Q(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$. Ainsi, -1 est racine double du polynôme caractéristique. On en déduit que les solutions sont de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n.$$

Les conditions initiales donnent : $\mu = 1$ et $-(\lambda+\mu) = -1$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n$.
Déterminer son degré de T_n, sa parité et son coefficient dominant, ainsi que les valeurs de $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

(b) On montre par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. »
$\mathcal{P}(0)$: $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \cdot \theta)$
$\mathcal{P}(1)$: $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \cdot \theta)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vrais. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(c) Soit $n \in n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la question 1b et la formule de Moivre, on a :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = \mathrm{Re}(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)) = \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n).$$

Avec la formule du binôme de Newton, on obtient alors :

$$T_n(\cos(\theta)) = \mathrm{Re}(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} \sin(\theta)^k\, \mathrm{i}^k\right).$$

Le terme i^k est réel si k est pair et imaginaire pur si k est impair. Ainsi, la partie réelle de cette expression est obtenue en ne conservant que les termes d'indice pair de la somme :

$$T_n(\cos(\theta)) = \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2\ell} \cos(\theta)^{n-2\ell} \sin(\theta)^{2\ell}(-1)^\ell = \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell \cos(\theta)^{n-2\ell}(1-\cos^2(\theta))^\ell$$
$$= \sum_{\ell=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2\ell} \cos(\theta)^{n-2\ell}(\cos^2(\theta)-1)^\ell.$$

Soit maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $S_n(X) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$. Ainsi, pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$, les polynômes S_n et T_n coïncident sur tout x pouvant s'écrire sous la forme $x = \cos\theta$, c'est à dire sur $[-1,1]$. Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[-1,1]$ est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme $S_n - T_n$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines, et est donc nul. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad T_n = S_n = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k.$$

Cette méthode qu'on a utilisée pour identifier S_n et T_n est très importante. Retenez-la !

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$(T_n(\cos\theta))' = -\sin\theta T_n'(\cos\theta), \qquad \text{et} \qquad (T_n(\cos\theta))' = (\cos(n\theta))' = -n\sin(n\theta).$$

Ainsi, puisque $\sin\theta$ est non nul pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$T_n'(\cos\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}\cdot$ Pour tout $\theta \in]0,\pi[$, on a : $\sin\theta T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$.
Dérivons cette expression par rapport à θ : pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$-\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) + \cos\theta T_n'(\cos\theta) = n^2\cos(n\theta) = n^2 T_n(\cos\theta).$$

Ainsi, on obtient :

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\quad (1-\cos^2\theta)T_n''(\cos\theta) - \cos\theta T_n'(\cos\theta) + n^2 T_n(\cos\theta) = 0$$

Soit P_n le polynôme $P = (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$. Alors, pour tout $\theta \in]0,\pi[$, $P_n(\cos\theta) = 0$, et donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $P_n(x) = 0$. Ainsi, le polynôme P_n admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1b, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Les racines de T_n dans $[-1,1]$ sont de la forme $r = \cos\theta$, pour une valeur de θ dans $[0,\pi]$, le cosinus étant une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Une telle valeur r est racine si et seulement si $\cos(n\theta) = 0$, donc si et seulement si $n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$, donc si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{puis:} \qquad \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$

Ne prendre que les représentants dans $[0,\pi]$ revient à ne prendre que les valeurs de k dans $[\![0,n-1]\!]$. Ainsi, l'ensemble des racines de T_n dans $[-1,1]$ est :

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}=\left\{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}.$$

Le cosinus étant injectif sur $[0,\pi]$, toutes les racines ainsi décrites sont deux à deux distinctes. On a donc n racines du polynôme T_n, de degré n. On les a donc toutes.

(b) On rappelle que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}. De plus, T_n admettant n racines (réelles), il est scindé dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, il admet même décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad T_n=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

(c) À une constante près, il s'agit de $T_n(0)$. Plus précisément, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}T_n(0).$$

Or, la suite $(T_n(0)_{n\in\mathbb{N}})$ vérifie la relation de récurrence :

$$T_0(0)=1,\qquad T_1(0)=0,\qquad \forall n\in\mathbb{N}, T_{n+2}(0)=-T_n(0).$$

Ainsi, si n est impair, $T_n(0)=0$, et si n est pair, alors $T_n(0)=(-1)^{\frac{n}{2}}$. Par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ est impair}\\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair.}\end{cases}$$

3. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}X^k$.

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n,n}$ est le coefficient dominant de P_n, donc $a_{n,n}=2^{n-1}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, T_n est de même parité que n, donc le coefficient de son monôme de degré $n-1$ est nul. Ainsi, $a_{n,n-1}=0$.

(b) D'après les règles de dérivation, on a, pour tout $n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}T_n'&=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}kX^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}kX^{k-1}\\ T_n''&=\sum_{k=2}^{n}a_{n,k}k(k-1)X^{k-2}=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}k(k-1)X^{k-2}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation différentielle de la question 1d se réécrit :

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=2}^{n}a_{n,k}k(k-1)X^{k-2}-\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}k(k-1)X^k-\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}kX^k+\sum_{k=0}^{n}n^2a_{n,k}X^k\\ &=\sum_{k=0}^{n-2}a_{n,k+2}(k+2)(k+1)X^k-\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}k(k-1)X^k-\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}kX^k+\sum_{k=0}^{n}n^2a_{n,k}X^k\\ &=\sum_{k=0}^{n-2}\left(a_{n,k+2}(k+2)(k+1)-a_{n,k}k(k-1)-a_{n,k}k+n^2a_{n,k}\right)X^k+2^{n-1}(-n(n-1)-n+n^2)X^n\\ &=\sum_{k=0}^{n-2}\left(a_{n,k+2}(k+2)(k+1)+(n^2-k^2)a_{n,k}\right)X^k.\end{aligned}$$

Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (principe d'identification des coefficients), on obtient la relation suivante :

$$\forall n\geqslant 2,\ \forall k\in[\![0,n-2]\!],\quad a_{n,k+2}(k+2)(k+1)+(n-k)(n+k)a_{n,k}.$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. Alors pour tout $k \in [\![0, E\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1]\!]$, $a_{n,n-(2k+1)} = 0$, puisque T_n et n ont même parité. Il suffit donc de déterminer les coefficients $a_{n,n-2k}$ pour tout $k \in [\![0, E\left(\frac{n}{2}\right)]\!]$.
Pour $k = 0$, on sait déjà que : $a_{n,n} = 2^{n-1}$. De plus, la relation de récurrence de la question précédente donne (avec $k = n - 2$) :

$$a_{n,n-2} = \frac{-2^{n-1} \cdot n(n-1)}{2(2n-2)}.$$

En l'appliquant une deuxième fois avec $k = n - 4$ (si $n \geqslant 4$) :

$$a_{n,n-4} = \frac{2^{n-1} \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n-4)}.$$

En appliquant itérativement cette relation de récurrence, on obtient donc, pour tout $k \in [\![1, E(\frac{n}{2})]\!]$,

$$a_{n,n-2k} = \frac{(-1)^k \cdot 2^{n-1} \cdot n(n-1) \cdots (n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k \cdot (2n-2)(2n-4) \cdots (2n-2k)},$$

formule qu'il faufrait démontrer par une récurrence (immédiate) pour plus de rigueur. Simplifions un peu cette expression. Pour tout $k \in [\![1, E(\frac{n}{2})]\!]$:

$$a_{n,n-2k} = \frac{(-1)^k \cdot 2^{n-1} \cdot n!(n-k-1)!}{(n-2k)! \cdot 2^k k! \cdot 2^k (n-1)!} = \frac{(-1)^k \cdot 2^{n-2k-1} \cdot n(n-k)!}{(n-k)(n-2k)!k!} = (-1)^k \cdot 2^{n-2k-1} \cdot \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k}.$$

Cette expression est aussi valable pour $k = 0$. On obtient donc, pour tout $n \geqslant 2$ (et on n'a pas besoin de distinguer suivant la parité de n) :

$$T_n = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \cdot 2^{n-2k-1} \cdot \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k} X^{n-2k}.$$

Remarquez que si n est pair, on retrouve le terme constant, c'est-à-dire $T_n(0)$, calculé plus haut, en considérant $k = E\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$:

$$a_{n,0} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n/2} = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Cette vérification confirme nos calculs.
Remarquez que l'expression trouvée pour T_n reste valable pour $n = 1$, mais pas pour $n = 0$.

Partie II – Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = 2X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n.$$

1. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in n \in \mathbb{N}$ que U_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n.
   C'est le cas pour U_0 et U_1.
   Soit $n \in n \in \mathbb{N}$ tel que ce soit le cas pour U_n et U_{n+1}. Alors U_{n+2} est un polynôme en tant que somme de deux polynômes, et

   $$\deg 2XU_{n+1} = n+2 \qquad \text{et} \qquad \deg U_n = n, \qquad \text{donc:} \qquad \deg U_{n+2} = \max(n+2, n) = n+2,$$

   (c'est une égalité car les deux degrés trouvés sont différents). De plus, cette étude montre que le monôme dominant de U_{n+2} provient du monôme dominant de U_{n+1}. Le coefficient dominant de U_{n+1} étant 2^{n+1} d'après l'hypothèse de récurrence, celui de U_{n+2} est donc $2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$.
   D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant 2^n.

2. On montre par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : « \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\theta \cdot U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta) ».$$

$\mathcal{P}(0)$: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta U_0(\cos\theta) = \sin\theta = \sin((0+1)\theta)$.
$\mathcal{P}(1)$: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta U_1(\cos\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vrais. Alors :

$$\begin{aligned}
\sin\theta U_{n+2}(\cos\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta U_{n+1}(\cos\theta) - \sin\theta U_n(\cos\theta) \\
&= 2\cos(\theta)\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta) \\
&= \sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) - \sin((n+1)\theta) \\
&= \sin((n+3)\theta).
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vrai pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question I-1d, pour tout $\theta in]0, \pi[$,

$$T'_{n+1}(\cos\theta) = \frac{(n+1)\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = (n+1)U_n(\cos\theta).$$

Ainsi, T'_{n+1} et $(n+1)U_n$ sont deux polynômes coïncidant sur une infinité de valeurs, ils sont donc égaux : $T'_{n+1} = (n+1)U_n$.

4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} (-1)^k \cdot 2^{n-2k} \cdot \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \binom{n+1-k}{k} X^{n+1-2k},$$

donc :

$$\begin{aligned}
T'_{n+1} &= \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \cdot 2^{n-2k} \cdot \frac{(n+1)(n+1-2k)}{n+1-k} \cdot \binom{n+1-k}{k} X^{n-2k} \\
&= (n+1) \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \cdot 2^{n-2k} \cdot \binom{n-k}{k} X^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Remarquez que la modification de l'indice supérieur de la somme permet de se débarasser du terme constant dans la dérivation lorsque n est pair, mais de garder tous les termes lorsque n est impair (il n'y a pas de terme constant dans ce cas). On obtient donc finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \cdot 2^{n-2k} \cdot \binom{n-k}{k} X^{n-2k}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(n+1)U_n = T'_{n+1}$, $(n+1)U'_n = T''_{n+1}$ et $(n+1)U''_n = T'''_{n+1}$. Dérivons donc l'équation différentielle satisfaite par T_{n+1}, on obtient :

$$(1-X^2)T'''_{n+1} - 2XT''_{n+1} - XT''_{n+1} - T'_{n+1} + (n+1)^2 T'_{n+1} = 0,$$

$$\text{soit:} \qquad (1-X^2)T'''_{n+1} - 3XT''_{n+1} + n(n+2)T'_{n+1} = 0.$$

Ainsi, U_n satisfait la relation :

$$(1-X^2)U''_n - 3XU'_n + n(n+2)U_n = 0.$$

5. On cherche dans un premier temps les racines comprises dans l'intervalle $]-1,1[$, c'est-à-dire s'écrivant sous la forme $\cos\theta$, pour une valeur de $\theta \in]0,\pi[$. Pour ces valeurs de θ, $\sin\theta \neq 0$, donc $\cos\theta$ est racine de U_n si et seulement si $\sin((n+1)\theta) = 0$, donc ssi :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ (n+1)\theta = k\pi \qquad \text{soit:} \qquad \exists k \in \mathbb{N},\ \theta = \frac{k\pi}{n+1}.$$

Pour se restreindre aux représentants dans $]0,\pi[$, on se retreint à $k \in [\![1,n]\!]$. Ainsi, l'ensemble des racines de U_n comprises dans $]-1,1[$ est :

$$\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

Le cosinus étant injectif sur $]0,\pi[$, ces racines sont deux à deux distinctes. On a donc n racines distinctes d'un polynôme de degré n, et par conséquent, ce sont *toutes* les racines de U_n.

Problème 2 – Calcul de $\cos\dfrac{\pi}{17}$

1. On exploite une remarque du cours, en utilisant les exponentielles complexes. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\cos(b+kh) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+kh)}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h})^k\right) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nh}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h}}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nh}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{h}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{nh}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nh}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{h}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{h}{2}}}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(b+(n-1)\frac{h}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\right)\\
&= \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(b+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.
\end{aligned}$$

2. *On définit deux réels x et y par :*

$$\begin{cases} x = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 11a \\ y = \cos a + \cos 9a + \cos 13a + \cos 15a. \end{cases}$$

(a) On a, d'après la question 1 :

$$x + y = \sum_{k=0}^{7}\cos(a+2ak) = \frac{\sin 8a\cos 8a}{\sin a} = \frac{\sin 16a}{2\sin a}.$$

Or, $17a = \pi$, donc $\sin 16a = \sin(\pi - a) = \sin a$. Ainsi, comme $\sin a \neq 0$, $x + y = \frac{1}{2}$.

(b) On fonce dans les calculs tête baissée, cela vaut mieux que de tergiverser.

$$\begin{aligned}
xy &= (\cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 11a)\cdot(\cos a + \cos 9a + \cos 13a + \cos 15a)\\
&= \cos 3a\cos a + \cos 3a\cos 9a + \cos 3a\cos 13a + \cos 3a\cos 15a + \cos 5a\cos a + \cos 5a\cos 9a\\
&\qquad + \cos 5a\cos 13a + \cos 5a\cos 15a + \cos 7a\cos a + \cos 7a\cos 9a + \cos 7a\cos 13a + \cos 7a\cos 15a\\
&\qquad + \cos 11a\cos a + \cos 11a\cos 9a + \cos 11a\cos 13a + \cos 11a\cos 15a\\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 12a + \cos 16a + \cos 10a + \cos 18a + \cos 12a + \cos 6a + \cos 4a\\
&\qquad + \cos 14a + \cos 4a + \cos 18a + \cos 8a + \cos 20a + \cos 10a + \cos 8a + \cos 6a + \cos 16a + \cos 2a\\
&\qquad + \cos 20a + \cos 6a + \cos 22a + \cos 8a + \cos 12a + \cos 10a + \cos 20a + \cos 2a + \cos 24a + \cos 2a\\
&\qquad + \cos 26a + \cos 4a\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a - \cos 5a - \cos a - \cos 7a - \cos a - \cos 5a + \cos 6a + \cos 4a - \cos 3a\\
&\qquad + \cos 4a - \cos a + \cos 8a - \cos 3a - \cos 7a + \cos 8a + \cos 6a - \cos a + \cos 2a - \cos 3a + \cos 6a\\
&\qquad - \cos 5a + \cos 8a - \cos 5a - \cos 7a - \cos 3a + \cos 2a - \cos 7a + \cos 2a + \cos 8a + \cos 4a\Big)\\
&= \frac{1}{2}\left(-4\cos a + 4\cos 2a - 4\cos 3a + 4\cos 4a - 4\cos 5a + 4\cos 6a - 4\cos 7a + 4\cos 8a\right)\\
&= -2(\cos a - \cos 2a + \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a - \cos 6a + \cos 7a - \cos 8a)
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $17a = \pi$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos ka = -\cos(17-k)a = -\cos(17+k)a$. Finalement, ce n'est pas si monstrueux que cela, si on s'y prend soigneusement.

(c) On utilise à nouveau la question 1. Pour avoir un signe qui alterné, au lieu de se contenter d'ajouter a à chaque fois, on ajoute $a+\pi$. Ainsi :

$$\begin{aligned} xy &= -2\sum_{k=0}^{7}\cos(a+k(a+\pi)) = \frac{\sin 4(a+\pi)\cos\left(a+7\frac{a+\pi}{2}\right)}{\sin\frac{a+\pi}{2}} = -2\cdot\frac{\sin 4a\cos\left(\frac{9a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{a}{2}} \\ &= -2\cdot\frac{\sin 4a\sin\left(\frac{9a}{2}\right)}{\cos\frac{a}{2}} = -\frac{\cos\left(-\frac{a}{2}\right)-\cos\frac{17a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = -1, \end{aligned}$$

car $\cos\frac{17a}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

(d) On en déduit que x et y sont racines du polynôme $X^2 - \frac{1}{2} - 1$.

(e) On compare en fait x et y à 0 :

$$x = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a - \cos 4a.$$

Or, toutes ces valeurs sont dans $[0, \frac{\pi}{2}] = [0, \frac{17a}{2}]$, et le cosinus est positif et décroissant sur cet intervalle. Ainsi, $\cos 3a - \cos 4a \leqslant 0$, et

$$x \geqslant \cos 5a + \cos 7a \geqslant 0.$$

De même, on obtient, pour y, puisque $4a \leqslant \frac{\pi}{3}$,

$$y = \cos a - \cos 8a - \cos 4a - \cos 2a \leqslant 1 - \cos 8a - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leqslant 0.$$

Ainsi, $y \leqslant 0 \leqslant x$.

(f) Le discriminant de $X^2 - \frac{1}{2} - 1$ est $\Delta = \frac{17}{4}$, et comme $y \leqslant x$,

$$x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

3. *On définit quatre réels z, t, u et v par :*

$$\begin{cases} z = \cos 3a + \cos 5a \\ t = \cos 7a + \cos 11a \\ u = \cos a + \cos 13a \\ v = \cos 9a + \cos 15a \end{cases}$$

(a) La méthode est la même et les calculs moins fastidieux :

$$\begin{aligned} zt &= (\cos 3a + \cos 5a)(\cos 7a + \cos 11a) \\ &= \cos 3a\cos 7a + \cos 3a\cos 11a + \cos 5a\cos 7a + \cos 5a\cos 11a \\ &= \frac{1}{2}\big(\cos 10a + \cos 4a + \cos 14a + \cos 8a + \cos 12a + \cos 2a + \cos 16a + \cos 6a\big) \\ &= -\frac{1}{2}\big(\cos a - \cos 2a + \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a - \cos 6a + \cos 7a - \cos 8a\big) = \frac{xy}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} uv &= (\cos a + \cos 13a)(\cos 9a + \cos 15a) \\ &= \cos a\cos 9a + \cos a\cos 15a + \cos 13a\cos 9a + \cos 13a\cos 15a \\ &= \frac{1}{2}\big(\cos 10a + \cos 8a + \cos 14a + \cos 16a + \cos 4a + \cos 22a + \cos 2a + \cos 28a\big) \\ &= -\frac{1}{2}\big(\cos a - \cos 2a + \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a - \cos 6a + \cos 7a - \cos 8a\big) = \frac{xy}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) On a $zt = -\frac{1}{4}$ et $z+t = x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi, z et t sont racines du polynôme $P_1 = X^2 - \frac{1+\sqrt{17}}{4} \cdot X - \frac{1}{4}$.
On a $uv = -\frac{1}{4}$ et $u+v = x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$. Ainsi, u et v sont racines du polynôme $P_2 = X^2 - \frac{1-\sqrt{17}}{4} \cdot X - \frac{1}{4}$.

(c) Les réels $3a$ et $5a$ sont dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc $z = \cos 3a + \cos 5a \geqslant 0$.
De plus, $t = \cos 7a + \cos 11a = \cos 7a - \cos 5a$, et $7a$ et $5a$ sont dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, et le cosinus est décroissant sur cet intervalle. Donc $t \leqslant 0$. Ainsi, $t \leqslant z$.

Le discriminant de P_1 est $\Delta = \dfrac{18 + 2\sqrt{17}}{16} + 1 = \dfrac{17 + \sqrt{17}}{8}$. Ainsi :

$$z = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} + \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{4\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} - \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{4\sqrt{2}}.$$

Les réels $9a$ et $15a$ sont dans $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc $v = \cos 9a + \cos 15a \leqslant 0$.
De plus, $u = \cos a + \cos 13a = \cos a - \cos 4a$, et a et $4a$ sont dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, et le cosinus est décroissant sur cet intervalle. Donc $u \geqslant 0$. Ainsi, $v \leqslant u$.

Le discriminant de P_2 est $\Delta = \dfrac{18 - 2\sqrt{17}}{16} + 1 = \dfrac{17 - \sqrt{17}}{8}$. Ainsi :

$$u = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} + \frac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{4\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} - \frac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{4\sqrt{2}}.$$

4. (a) Un dernier effort :

$$\cos a \cos 13a = \frac{1}{2}(\cos 12a + \cos 14a) = -\frac{1}{2}(\cos 3a + \cos 5a) = -\frac{z}{2} = -\frac{1 + \sqrt{17}}{16} - \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{8\sqrt{2}}$$

(b) De plus, $\cos a + \cos 13a = u = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{8} + \dfrac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{4\sqrt{2}}$.
Les réels $\cos a$ et $\cos 13a$ sont donc racines du polynôme :

$$P = X^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{8} + \frac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{4\sqrt{2}}\right) X - \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{8\sqrt{2}}\right).$$

Comme $\cos a \geqslant 0$ et $\cos 13a \leqslant 0$, $\cos a$ est la plus grande racine de ce polynôme. Calculons le discriminant de P :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{8\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1 + \sqrt{17}}{4} + \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{18 - 2\sqrt{17}}{64} + \frac{17 - \sqrt{17}}{32} + \frac{(1 - \sqrt{17})\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{16\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1 + \sqrt{17}}}{4} + \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{17 + 3\sqrt{17}}{16} + \frac{(1 - \sqrt{17})\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{16\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{17 + \sqrt{17}}}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement (et on en est fier) :

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1 - \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1 - \sqrt{17}}{\sqrt{2}}\sqrt{17 - \sqrt{17}} + 4\sqrt{2}\sqrt{17 + \sqrt{17}}}.$$