Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch Avril 2006

Correction du Devoir Maison n° 18 – Diagonalisation

Exercice 1 –

1. Notons $\mathcal{A}_n$ l'événement : « Alice a la balle après n lancers », et de même pour $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{C}_n$. D'après l'énoncé :
   - $P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{A}_n) = 0$ (on ne s'envoie pas la balle à soi-même), $P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{A}_n) = \frac{3}{4}$ et $P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{A}_n) = \frac{1}{4}$;
   - $P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \frac{3}{4}$, $P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{B}_n) = 0$ et $P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \frac{1}{4}$;
   - $P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{C}_n) = 0$, $P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{C}_n) = 1$ et $P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{C}_n) = 0$.

   D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet (A_n, B_n, C_n), on obtient :
   - $A_{n+1} = P(\mathcal{A}_{n+1}) = P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) + P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{B}_n)P(\mathcal{B}_n) + P(\mathcal{A}_{n+1}|\mathcal{C}_n)P(\mathcal{C}_n) = \frac{3}{4}B_n$;
   - $B_{n+1} = P(\mathcal{B}_{n+1}) = P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) + P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{B}_n)P(\mathcal{B}_n) + P(\mathcal{B}_{n+1}|\mathcal{C}_n)P(\mathcal{C}_n) = \frac{3}{4}A_n + C_n$;
   - $C_{n+1} = P(\mathcal{C}_{n+1}) = P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) + P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{B}_n)P(\mathcal{B}_n) + P(\mathcal{C}_{n+1}|\mathcal{C}_n)P(\mathcal{C}_n) = \frac{1}{4}A_n + \frac{1}{4}B_n$;

   On obtient donc la relation matricielle suivante :
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$

2. λ est valeur propre de M si et seulement si la matrice $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible.

   Effectuons un pivot de Gauss. Effectuons $L_1 \leftarrow 4L_1$, $L_2 \leftarrow 4L_2$, $L_3 \leftarrow 4L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\lambda \\ 3 & -4\lambda & 4 \\ -4\lambda & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4\lambda L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\lambda \\ 0 & -4\lambda - 3 & 4 + 12\lambda \\ 0 & 3 + 4\lambda & -16\lambda^2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

   On obtient donc finalement la matrice suivante : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4\lambda \\ 0 & -4\lambda - 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 + 12\lambda - 16\lambda^2 \end{pmatrix}$.

   Attention, ne parlez pas de réduite de Gauss, ce n'est une réduite de Gauss que si $-4\lambda - 3 \neq 0$, ou si $-4\lambda - 3 = 0$ et $4 + 12\lambda - 16\lambda^2$. Dans les autres cas, la matrice M' n'est pas échelonnée.

   Cette matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, c'est-à-dire si $-4\lambda - 3 \neq 0$ et $4 + 12\lambda - 16\lambda^2 \neq 0$. Ainsi, la matrice M est non inversible si et seulement si $\lambda = -\frac{3}{4}$, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\frac{1}{4}$. Ainsi, M admet trois valeurs propres : $\mathrm{Spec}(M) = \{1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\}$.

   On peut d'ors et déjà affirmer que M est diagonalisable, pûisqu'elle admet trois valeurs propres, alors qu'elle est de taille 3. De plus, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Déterminons des bases de ces sous-espaces.

   Sous-espace propre E_1 : E_1 est l'ensemble des solutions de $MX = 0$, donc de $M'X = 0$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{L_1 \leftarrow 7L_1 + L_2}{\iff} \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & -12 \\ 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Comme je l'ai déjà dit, cet espace est de dimension 1 ; on a le choix pour z ; cela impose les valeurs de y et de z. Ainsi, $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$ (le choix de 7 pour z permet d'éviter les fractions).

   Sous-espace propre $E_{-\frac{1}{4}}$: ce sont les solutions de
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, $E_{-\frac{1}{4}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sous-espace propre $E_{-\frac{3}{4}}$: ce sont les solutions de

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2/5\\ L_3 \leftarrow L_3+9L_2\\ L_1 \leftarrow L_1-3L_2}}{\iff} \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Ainsi, $E_{-\frac{3}{4}}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

3. Soit f canoniquement associé à M. Alors, dans la base $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}12\\ 16\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)$, la matrice de f est :

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

D'après la théorie des changements de base, on a $D=P^{-1}AP$, avec :

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{3}{4}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P=\begin{pmatrix}12 & -3 & -1\\ 16 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} à l'aide d'un pivot. Dans le but de limiter les calculs, je ne vais pas faire les calculs dans l'ordre habituel (les pivots de la gauche vers la droite).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}12 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 16 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) L_1 \leftarrow L_2+L_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}28 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 16 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1+L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}35 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 16 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l}L_2 \leftarrow 35L_2-16L_1\\ L_3 \leftarrow 5L_3-L_1\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}35 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 35 & 35 & -16 & 19 & -16\\ 0 & 10 & 0 & -1 & -1 & 4\end{array}\right) L_2 \leftarrow 2L_2-7L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}35 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 70 & -25 & 45 & -60\\ 0 & 10 & 0 & -1 & -1 & 4\end{array}\right) \begin{array}{l}\text{permutation}\\ \text{normalisation}\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{6}{7}.\end{array}\right)$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35}\\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5}\\ -\frac{5}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{6}{7}.\end{pmatrix}$.

4. $M=PDP^{-1}$, d'où

$$M^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}12 & -3 & -1\\ 16 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35}\\ -\frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{2}{5}\\ -\frac{5}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{6}{7}.\end{pmatrix}.$$

Je vous laisse faire les calculs.

5. Par une récurrence immédiate, $\begin{pmatrix}A_n\\ B_n\\ C_n\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}A_0\\ B_0\\ C_0\end{pmatrix}$.

En passant à la limite, si on note A, B et C les trois limites, on obtient :

$$\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}=\lim_{n\to+\infty}M^n\begin{pmatrix}A_0\\ B_0\\ C_0\end{pmatrix}.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty}M^n=P^{-1}\lim_{n\to+\infty}D^nP=\begin{pmatrix}12 & -3 & -1\\ 16 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35}\\ -\frac{1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{2}{5}\\ -\frac{5}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{6}{7}.\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{35} & \frac{12}{35} & \frac{12}{35}\\ \frac{16}{35} & \frac{16}{35} & \frac{16}{35}\\ \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,
$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{12}{35} & \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} & \frac{16}{35} & \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} & \frac{7}{35} & \frac{7}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35}(A_0+B_0+C_0) \\ \frac{16}{35}(A_0+B_0+C_0) \\ \frac{7}{35}(A_0+B_0+C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} \end{pmatrix}.$$
En particulier, ces probabilités ne dépendent pas de A_0, B_0 et C_0, donc de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

Exercice 2 – (extrait de HEC eco 2004)

Partie I – Diagonalisation de s

1. **Généralités sur** s.
   (a) Par définition même, s est définie pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et $s(Q)$ est un polynôme de degré au plus $2n$, donc élément de $\mathbb{C}[X]$. Il reste donc à montrer que s est une application linéaire.
   Soit P et Q dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons : $P = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{2n} b_k X^k$.
   Alors : $\lambda P + Q = \sum\limits_{k=0}^{2n} (\lambda a_k + b_k) X^k$, donc $s(\lambda P + Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n} (\lambda a_{2n-k} + b_{2n-k} X^k)$.
   De plus : $\lambda s(P) + s(Q) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k + \sum\limits_{k=0}^{2n} b_{2n-k} X^k = \sum\limits_{k=0}^{2n} (\lambda a_{2n-k} + b_{2n+k}) X^k$.
   Ainsi, $\lambda s(P) + s(Q) = s(\lambda P + Q)$. Donc s est une application linéaire.
   (b) La base canonique de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ est $b.c. = (1, X, \dots, X^{2n})$. Déterminons donc $s(X^i)$ pour tout $i \in [\![0, 2n]\!]$: $\forall i \in [\![0, 2n]\!], s(X^i) = X^{2n-i}$.
   Ainsi : $[s]_{b.c.} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$.
2. **Diagonalisation dans le cas particulier** $n = 1$
   (a) Si $n = 1$, $[s]_{b.c.} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Alors : $M = [s]_{b.c.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Effectuons un pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I_3$ pour savoir à quelle condition sur λ cette matrice n'est pas inversible (et donc λ est une valeur propre de M).
   $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. $\qquad L_1 \leftrightarrow L_3$
   $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1$
   $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$
   Cette matrice, qui est triangulaire, est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc si $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$. Ainsi, $M - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $\lambda = \pm 1$. On en déduit que $\mathrm{Spec}(s) = \mathrm{Spec}(M) = \{-1, 1\}$.
   (c) Déterminons E_{-1}. Le résultat du pivot précédent montre que E_{-1} est l'ensemble des solutions du sysème donné par la matrice : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est échelonnée de rang 2, donc E_{-1} est de dimension $3 - 2 = 1$, d'après le théorème du rang. Cette information suffirait s'il ne s'agissait que de prouver la diagonalisabilité de M. Comme on veut la diagonalisation effective, on

va chercher une base de E_{-1}. La troisième variable étant paramètre libre, on obtient une base de E_{-1} en considérant le vecteur $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Déterminons E_1. Le résultat du pivot précédent montre que E_1 est l'ensemble des solutions du sysème donné par la matrice : $M'' = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Cette matrice est échelonnée de rang 1, donc E_1 est de dimension $3-1=2$, d'après le théorème du rang. On peut donc dès à présent conclure que M est diagonalisable, puisque $\dim E_{-1} + \dim E_1 = 3$.

On trouve : $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Par conséquent, $M = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

(d) Cela est un peu redondant avec la question précédente, et a pour seul but de bien faire le lien entre diagonalisation des matrices et diagonalisation des endomorphismes. Une base possible est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, et la matrice de s dans cette base est D.

(e) Trouvons pour commencer une racine k-ième D' de D dans $\mathbb{C}_3[X]$. Par exemple $D' = \begin{pmatrix}e^{\frac{i\pi}{k}}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Alors la matrice d'un endomorphisme t convenable dans la base canonique est : $N = PD'P^{-1}$.

Calculons donc P^{-1}, à l'aide de l'algorithme du pivot, en effectuant les mêmes opérations sur les lignes de I_3 que les opérations faites pour passer de P à I_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&2&1&0&1\end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}L_1 \leftarrow -L_1\\ L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, d'où :

$$N = [t]_{bc} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\frac{i\pi}{k}}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^{\frac{i\pi}{k}}&0&e^{\frac{i\pi}{k}}\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{\frac{i\pi}{k}}&0&1-e^{\frac{i\pi}{k}}\\0&2&0\\1-e^{\frac{i\pi}{k}}&0&1+e^{\frac{i\pi}{k}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+e^{\frac{i\pi}{k}}}{2}&0&\frac{1-e^{\frac{i\pi}{k}}}{2}\\0&1&0\\\frac{1-e^{\frac{i\pi}{k}}}{2}&0&\frac{1+e^{\frac{i\pi}{k}}}{2}\end{pmatrix}$$

3. **Étude du cas général**

(a) Puisque par définition, $s^2 = s$ (ce qui définit une symétrie, soit dit en passant), ses valeurs propres sont solutions du polynôme $X^2 - X = 0$. En effet, soit x un vecteur propre (donc non nul) pour une valeur λ donnée, alors $s^2(x) = s(\lambda x) = \lambda s(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2 x = \lambda x$, puis $\lambda^2 = \lambda$, puisque $x \neq 0$ (démonstration à refaire rapidement, surtout si elle apparaît en première moitié de copie).

Ainsi, $\mathrm{Spec}(s) \subset \{-1,+1\}$. D'autre part, $s(X^n) = X^n$, et $s(1-X^{2n}) = X^{2n}-1$. Donc X^n est vecteur propre associé à 1, et $1-X^{2n}$ est vecteur propre associé à -1. Cela prouve que 1 et -1 sont des valeurs propres.

(b) Pour commencer : $M + I_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$

Cette matrice possède une symétrie dans ses colonnes : $C_1 - C_{2n+1} = 0$, $C_2 - C_{2n} = 0$ etc. Cela fournit n vecteurs de E_{-1} : $X^i - X^{2n-1}$, $i \in [\![0, n-1]\!]$. Ces vecteurs forment une famille libre (famille dont les degrés sont échelonnés).

De même, $M - I_{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & & & 1 \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix}$

Cette matrice possède une anti-symétrie dans ses colonnes : $C_1 + C_{2n+1} = 0$, $C_2 + C_{2n} = 0$ etc. Cela fournit n vecteurs de E_1 : $X^i + X^{2n-1}$, $i \in [\![0, n-1]\!]$, ainsi qu'un $n+1$-ième qu'on a déjà donné X^n. Ces $n+1$ vecteurs forment une famille libre.

On en déduit que $\dim E_1 + \dim E_{-1} \geqslant 2n+1$, et comme E_1 et E_{-1} sont en somme directe dans $\mathbb{C}^{2n+1}$, $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 2n+1$. Cela montre que M est diagonalisable, et de surcroît, $\dim E_{-1} = n$ et $\dim E_1 = n+1$. Ainsi, les familles libres décrites sont des bases des espaces propres.

(c) Une base de vecteurs propres de s est donc : $\mathcal{B} = ((X^i - X^{2n-i})_{i \in [\![0,n-1]\!]}, X^n, (X^i + X^{2n-i})_{i \in [\![0,n-1]\!]})$.

Dans cette base, la matrice de s est : $D = [s]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

cette matrice ayant n facteurs digonaux égaux à -1 et $n+1$ facteurs diagonaux égaux à 1.

(d) M est la matrice de s dans la base canonique. On a donc donné sa diagonalisation dans la question précédente : $M = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$, donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -1 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouvons des racines k-ième de la matrice D. Toute matrice diagonale D' dont les coefficients sont des racines k-ièmes des coefficients diagonaux de D convient. On a le choix, pour chaque coefficient diagonal, égal à ± 1, entre k racines distinctes. Cela fournit donc k^{2n+1} racines distinctes de D, puisqu'il y a $2n+1$ coefficients diagonaux :

$$D' = \begin{pmatrix} e^{\frac{(2\ell_1+1)i\pi}{k}} & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & e^{\frac{(2\ell_n+1)i\pi}{k}} & & & \vdots \\ \vdots & & & e^{\frac{(2\ell_{n+1})i\pi}{k}} & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & e^{\frac{(2\ell_{2n+1})i\pi}{k}} \end{pmatrix}, \qquad (\ell_1, \ldots, \ell_{2n+1}) \in [\![0, k-1]\!]^{2n+1}.$$

On trouve donc k^{2n+1} matrices N telles que $N^k = M$, données par $N = PD'P^{-1}$, pour toutes les matrices D' décrites ci-dessus (ne faites bien sûr pas le calcul, laissez sous cette forme !). Ces matrices N sont deux à deux distinctes, puisque les matrices $P^{-1}NP = D'$ sont deux à deux distinctes.

Exercice 3 – Racines carrées d'une matrice (extrait de CCP 2004)

1. **Exemple 1.**

(a) Cherchons pour commencer les valeurs propres de A. Pour cela, cherchons à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible, à l'aide d'un pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 11-\lambda & -5 & 5 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 5L_2 + (11-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & \lambda^2 - 14\lambda + 8 & 3\lambda - 8 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \boxed{\text{si } \lambda \neq 0} \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{\lambda} L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2 - 14\lambda + 8 & 3\lambda - 8 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda^2 - 14\lambda + 8)L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + 17\lambda - 16 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$, la matrice obtenue en troisième ligne est non inversible (une ligne nulle), donc 0 est valeur propre de A. De plus, si $\lambda \neq 0$, la matrice obtenue par le pivot est non inversible si et seulement si $\lambda^2 - 17\lambda + 16 = 0$, donc si $(\lambda - 1)(\lambda - 16) = 0$. Ainsi, 1 et 16 sont valeurs propres, et ce sont les seules valeurs propres non nulles. Par conséquent, $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 1, 16\}$.

On peut dès à présent en conclure que A est diagonalisable, puisqu'elle a trois valeur propres, et est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus, les espaces E_0, E_1 et E_{16} sont alors de dimension 1. Il suffit, pour en trouver une base, d'en trouver un vecteur non nul.

Base de E_0 : on peut revenir à la troisième ligne du système, ou alors, constater que la matrice A vérifie : $C_2 + C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0$. Ainsi, $E_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Base de E_1 : la matrice obtenue à l'issue du pivot est dans ce cas $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La troisième variable est paramètre libre. Une base de E_1 est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Base de E_{16} : la matrice obtenue est dans ce cas $\begin{pmatrix} -5 & -13 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $E_{16} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres. Soit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = PDP^{-1}$.

(b) Calculons P^{-1} à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, en effectuant sur I_3 les mêmes opérations qu'on effectue sur P pour parvenir à l'identité.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{6}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Ainsi, $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Soit R telle que $R^2 = A$, et soit $S = P^{-1}RP$. Alors $S^2 = P^{-1}RPP^{-1}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D$. Ainsi, S est une racine de D.

Réciproquement, soit R une matrice telle que $S = P^{-1}RP$ soit une racine de D. On obtient alors $R^2 = PSP^{-1}PSP^{-1} = PS^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Donc R est une racine de A.

(d) Soit S une racine carrée de D.

i. On a $DS = S^2 \cdot S = S^3$ et $SD = S \cdot S^2 = S^3$. Donc $DS = SD$.

ii. Supposons S non diagonale, et soit $s_{i,j}$, $i \neq j$, un coefficient non nul de S. On note λ_1, λ_2, λ_3 les coefficients diagonaux de D. Alors $(DS)_{i,j} = \lambda_i s_{i,j}$ et $(SD)_{i,j} = \lambda_j s_{i,j}$. Comme $SD = DS$, on obtient $\lambda_i s_{i,j} = \lambda_j s_{i,j}$, puis $\lambda_i = \lambda_j$, car $s_{i,j} \neq 0$, ce qui contredit le fait que $i \neq j$, et que les coefficients diagonaux de D sont deux à deux distincts.

Conclusion : S est diagonale. Ce raisonnement s'applique dès lors qu'on a n valeurs propres distinctes pour une matrice de taille $n \times n$. **À retenir !**

iii. Ainsi, S peut s'écrire sous la forme :

$$R = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \qquad (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{d'où} \qquad S = R^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les réels μ_1, μ_2 et μ_3 vérifient $\mu_1^2 = 0$, $\mu_2^2 = 1$ et $\mu_3^2 = 16$, donc $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \pm 1$ et $\mu_3 = \pm 4$. On obtient donc quatre racines carrées de R, et d'après ce qui précède, ce sont les seules. L'ensemble des racines carrées de R est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(e) D'après la question (1c), l'ensemble des racines de A est donc :

$$\left\{ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1} \right\}.$$

2. **Exemple 2.**

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, et soit n sont indice de nilpotence, c'est-à-dire le seul entier tel que $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$.

i. Question classique et vue plusieurs fois en TD ! (vous aurez bien sûr rectifié le k en n)
Puisque $M^{n-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $M^{n-1}X \neq 0$ (l'application linéaire canoniquement associée n'est pas nulle !). Montrons que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ est libre. On montre par récurrence descendante sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que $(M^k X, \dots, M^{n-1}X)$ est libre.
Initialisation : Puisque $M^{n-1}X$ est non nul, $(M^{n-1}X)$ est une famille libre.
Hérédité : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $(M^k X, \dots, M^{n-1}X)$ soit libre. Soit $(\lambda_{k-1}, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\lambda_{k-1} M^{k-1} X + \cdots + \lambda_{n-1} M^{n-1} X = 0.$$

On exploite le fait que $M^n = 0$ en multipliant cette expression par M, ce qui fait partir le dernier terme :

$$\lambda_{k-1} M^k X + \cdots + \lambda_{n-2} M^{n-1} X = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(M^k X, \dots, M^{n-1}X)$ étant libre, on obtient $\lambda_{k-1} = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$, puis $\lambda_{n-1} M^{n-1}X = 0$, donc $\lambda_{n-1} = 0$, puisque $M^{n-1}X \neq 0$. Par conséquent, $(M^{k-1}X, \dots, M^{n-1}X)$ est libre.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que la famille $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ est libre.

ii. C'est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3. Son cardinal est donc au plus 3. Ainsi, $n \leqslant 3$.

(b) On trouve : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

(c) Soit R une racine carrée de A. Alors $R^4 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R^6 = A^3 = 0$.

Par conséquent, R est nilpotente, mais $R^4 \neq 0$, donc son indice de nilpotence est supérieur ou égal à 5, ce qui contredit la question précédente. Ainsi, A n'admet pas de racine carrée.

(d) Soit plus généralement $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence n.

i. Il faut corriger l'inégalité en $2n - 1 > p$.
Le même raisonnement s'applique. L'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est au plus égal à p (même démonstration !).
Ainsi, si $2n - 1 > p$, et si R est une racine de A, $A^{n-1} = R^{2n-2} \neq 0$, et $A^n = R^{2n} = 0$. Par conséquent, R est nilpotente, d'indice de nilpotence au moins égal à $2n - 1$, donc strictement supérieur à p, d'où une contradiction.
Donc A n'admet pas de racine carrée.

ii. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$. Alors B est nilpotente, d'indice de nilpotence p. Soit :

$$A = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors A est nilpotente puisque B l'est, et A admet au moins une racine carrée, par exemple B.