Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Mai 2006

Correction du Devoir Maison n° 19
Continuité d'une série de fonctions
Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

1. Si l'étude de la régularité d'une fonction fait l'objet d'une question entière, il est impératif de rédiger très explicitement, sans se contenter de dire : « par les théorèmes généraux... « .
   Ainsi : La fonction $x \mapsto -n(x - x_0)^2$ définie sur RR est une fonction polynomiale. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction exponentielle $y \mapsto \mathrm{e}^y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par les règles de compositions de fonctions de claase $\mathcal{C}^\infty$, $f_{x_0,n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, étant la composition de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(f_{x_0,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   - si $x \neq x_0$, $(x - x_0)^2 > 0$, et donc $lim_n inf - n(x - x_0)^2 = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x) = 0$;
   - si $x = x_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}(x_0) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{x_0,n}(x_0) = 1$

   Ainsi, $(f_{x_0,n})$ converge simplement vers la fonction f_{x_0} nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, et telle que $f_{x_0}(x_0) = 1$.
3. f_{x_0} n'est évidemment pas continue en x_0, puisque $\lim\limits_{x\to x_0+} f_{x_0}(x) = 0 \neq 1 = f_{x_0}(x_0)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est une somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, chaque suite $(f_{x_i,n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers 0 si $x \neq x_i$, et vers 1 si $x = x_0$. Les réels x_i, $i \in [\![1, m]\!]$, étant deux à deux distincts, et d'après les règles d'arithmétique des limites, on en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $x \notin \{x_1, \dots, x_m\}$, et converge vers 1 si $x \in \{x_1, \dots, x_m\}$.
   Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f égale à 0 en tout point de $\mathbb{R}$, exeptés les points $x_1, \dots, x_m$, où elle vaut 1. Cette fonction n'est évidemment pas continue aux différents points x_i, les limites à droite et à gauche en ces points étant 0, alors que $f(x_i) = 1$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonction

1. Il fallait lire « uniformément convergente » bien sûr.
   La différence fondamentale entre convergence simple et coànvergence uniforme est que dans le cas de la convergence uniforme, le même entier N doit convenir pour tous les réels x (de I bien sûr) : on a uniformité de la vitesse de convergence (d'où la terminologie).
   Montrons que $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente, donc que :
   $$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists n > N, \quad |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon.$$
   Au vu des questions suivantes (eh oui, il peut être intéressant de lire tout le sujet avant de répondre à une question, cela donne parfois des idées), c'est probablement au voisinage de x_0 que la convergence uniforme va être contredite, puisque c'est en ce point que la limite simple n'est pas continue : proche de x_0, $(f_{x_0,n}(x))$ va rester trop longtemps proche de 1 ; et ne pas tendre assez vite vers 0, l'amplitude de ce comportement étant 1, on va prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
   Soit alors N quelconque. On doit montrer qu'il existe x (qu'on choisit differnent de x_0) tel qu'il existe $n \geqslant N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}$. Or :
   $$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2} \geqslant \frac{1}{2} \iff (x - x_0)^2 \leqslant \frac{\ln 2}{n} \iff |x - x_0| \leqslant \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}.$$

On peut donc choisir $n > N$ qulconque, et x tel que $x \neq x_0$ et $|x - x_0| \leqslant \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}$.
Cela donne bien l'existence de $x \in \mathbb{R}$, et de $n > N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \geqslant eps$. Par conséquent, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente.

Remarquez qu'il est utile dans ce type de raisonnements d'être à l'aise avec les règles élémentaires de la logique ; il faut notamment savoir nier sans hésitation des propositions logiques.

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant N,\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Montrons la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, et N donné par la définition de la convergence uniforme ; alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant N$, on a $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$. Ceci est vrai en particulier pour $y = x$. Ainsi, on a trouvé N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. D'après la définition de la limite des suites, on en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
Plus simplement ce qu'on vient de faire se résume par une tautologie purement formelle :

$$\exists N, \forall x, P(N, x) \Longrightarrow \forall x, \exists N, P(N, x).$$

En effet s'il existe un N convenable indépendemment de x, alors, pour tout x, il existe un N convenable (pas forcément indépendant de x). La réciproque n'est bien sûr pas vraie, ce qui est illustré ici par l'exemple $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite simplement convergente, mais pas uniformément convergente.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(y)+f_n(y)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)+f(y)|.$$

4. Il était sous-entendu que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, et que les f_n sont continues sur I.
Soit $x \in O$. Montrons que f est continue en x.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la convergence uniforme, il existe N tel que pour tout $y \in I$, pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons une telle valeur de N, et choisissons $n \geqslant N$ quelconque. Alors,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in I,\ |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Deux des termes de la somme de la question précédente sont majorés. Le terme restant peut être majoré en utilisant la définition de la continuité de f_n en x : il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour tout y tel que $|y - x| < \eta$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Cela montre bien la continuité de f en x.
Ceci étant valide pour tout $x \in I$, f est continue sur I.

5. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que dans la définition.
Montrons pour commencer que $\sum f_n$ converge simplement. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant a_n$. Comme $\sum a_n$ converge, on déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

Montrons que la convergence est uniforme. La fonction limite est $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la somme partielle de cette série.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in I$,

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Ce majorant a l'avantage de ne pas dépendre de x.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_n$ converge, il existe N (indépendant de x, donc) tel que pour tout $n \geqslant N$, $sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, et tout $x \in I$:

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Ce N étant indépendant de x, on a, par définition, convergence uniforme de $\sum f_n$.
Conclusion : si $\sum f_n$ converge normalement (ce qui est assez simple à vérifier), et si les f_n sont continues, alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.

Partie III – La fonction de Weierstraß : une fonction partout continue nulle part dérivable

1. Soit $b \in]0,1[$. a doit être un entier impair tel que $a > \dfrac{1 + \frac{3}{2}\pi}{b}$. Un tel entier existe toujours, puisque l'ensemble des entiers impairs est non borné.
2. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|b^n \cos(a^n \pi x)| \leqslant b^n$.
   Or, $\sum b^n$ converge, puisque $b \in]0,1[$. Ainsi, la somme définissant f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente (d'après II-5), donc simplement convergente (d'après II-2).
3. On a vu dans la question précédente que la somme est normalement convergente, donc uniformément convergente. Chaque fonction $x \mapsto b^n \cos(a^n \pi x)$, $n \in \mathbb{N}$, étant continue sur $\mathbb{R}$, on déduit de $II - 4$ que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = b^n \cos(a^n \pi x)$. Alors f_n est déivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = -(ab)^n \pi \sin(a^n \pi x) \qquad \text{donc:} \qquad |f_n(x)| \leqslant (ab)^n \pi.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis entre x et h, f_n étant dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $$|f_n(x+h) - f_n(x)| \leqslant |h|(ab)^n \pi.$$
   Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant cette inégalité sur $n \in [\![0, m-1]\!]$, on obtient :
   $$\sum_{n=0}^{m-1} |f_n(x+h) - f_n(x)| \leqslant |h|\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \frac{|h|\pi((ab)^m) - 1}{ab - 1} \leqslant \frac{|h|\pi(ab)^m}{ab-1},$$
   car $ab - 1 > 0$ par hypothèse. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire :
   $$|S_m(h)| = \left| \sum_{n=0}^{m-1} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|f_n(x+h) - f_n(x)|}{|h|} \leqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}.$$
5. Par définition de la partie entière, $a^m x - \frac{1}{2} < \alpha_m \leqslant a^m x + \frac{1}{2}$. Ainsi,
   $$-\frac{1}{2} \leqslant a^m x - \alpha_m < \frac{1}{2} \qquad \text{donc:} \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}.$$
   Par conséquent, $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \beta_m \leqslant \frac{3}{2}$, donc $|1 - \beta_m| \leqslant \frac{3}{2}$. On en déduit que $|h_m| = \frac{|1-\beta_m|}{a^m} \leqslant \frac{3}{2a^m}$.
6. (a) Le produit de deux nombres impairs est impair. Donc le produit de $n - m$ nombres impairs est impair. L'entier a étant impair, on en déduit que a^{n-m} est impair. Ainsi, si $\alpha_m + 1$ est impair, le produit $a^{n-m}(\alpha_m + 1)$ est encore impair (produit de deux nombres impairs). En revanche, si $\alpha_m + 1$ est pair, son produit par n'importe quel nombre entier est encore pair, donc $a^{n-m}(\alpha_m + 1)$ est pair. Ainsi, $a^{n-m}(\alpha_m + 1)$ est de même parité que $\alpha_m + 1$.
   (b) Décidément, il y avanit de nombreuses erreurs dans l'énoncé : il s'agissait de calculer $\cos(\pi a^n(x+h))$.
   On a : $x + h_m = x + \dfrac{1 - \beta_m}{a^m} = \dfrac{a_m x - \beta_m + 1}{a^m} = \dfrac{\alpha_m + 1}{a^m}$, par définition de β_m.
   Or $\cos(\pi a^n(x + h_m)) = \cos(a^{n-m}(\alpha + 1)\pi)$. D'après la question précédente, $a^{n-m}(\alpha_m + 1)$ est un entier de même parité que $\alpha + 1$, donc
   $$\cos(\pi a^n(x + h_m)) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha+1)} = (-1)^{\alpha+1}.$$

(c) De la même manière, a^{n-m} étant impair, $a^{n-m}\alpha_m$ est de même parité que α_m. Ainsi,

$$\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m) = (-1)^{a^{n-m}\alpha_m} = (-1)^{\alpha_m}, \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi a^{n-m}\alpha_m) = 0.$$

(d) On en déduit que

$$\begin{aligned}\cos(a^n\pi x) &= \cos(\pi a^{n-m}(\alpha_m + \beta_m)) \\ &= \cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)\cos(\pi a^{n-m}\beta_m) - \sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)\sin(\pi a^{n-m}\beta_m) \\ &= (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m).\end{aligned}$$

7. Il vient alors :

$$\begin{aligned}R_m(h_m) &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h_m)) - \cos(a^n\pi x)) \\ &= \frac{1}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n((-1)^{\alpha_m+1} - (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \\ &= \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h_m}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1+\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)).\end{aligned}$$

8. Les termes de la série ci-dessus sont positifs, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1+\cos y \geqslant 0$. Ainsi, la somme est supérieure à son premier terme, obtenu pour $n = m$. Par conséquent :

$$|R_m(h_m)| = \frac{1}{|h_m|}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1+\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)) \geqslant \frac{1}{|h_m|}b^m(1+\cos(\pi\beta_m)).$$

Or, $-\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}$, donc $\cos(\pi\beta_m) \geqslant 0$. On en déduit que $|R_m(h_m)| \geqslant \frac{b^m}{|h_m|} = \frac{(ab)^m}{1-\beta_m}$.
Or, puisque $-\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}$, on a : $\frac{1}{2} \leqslant 1-\beta_m \leqslant \frac{3}{2} \leqslant \frac{ab-1}{\pi}$, d'après l'hypothèse sur ab. Ainsi :

$$|R_m(h_m)| \geqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}.$$

9. On a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| &= |S_m(h_m) + R_m(h_m)| \\ &\geqslant |R_m(h_m)| - |S_m(h_m)| \\ &\geqslant \frac{(ab)^m}{1-\beta_m} - \frac{\pi(ab)^m}{ab-1} = (ab)^m\frac{ab-1-\pi(1-\beta_m)}{(1-\beta_m)(ab-1)} \\ &\geqslant (ab)^m\frac{ab-1-\frac{3\pi}{2}}{(1-\beta_m)(ab-1)} \\ &\geqslant \frac{2(ab)^m}{3}\cdot\frac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1},\end{aligned}$$

puisque $1-\beta_m \leqslant \frac{3}{2}$ et est positif.

10. (a) Par l'hypothèse sur ab, on a $\frac{ab-\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1} > 0$; de plus, $ab > 1$, donc $\lim_{m\to+\infty}(ab)^m = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right| = +\infty.$$

(b) Puisque $a > 1$ (sinon on n'aurait pas $ab > 1$, puisque $b < 1$), $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Ainsi, le résultat précédent contredit le critère séquenciel de la convergence du taux d'accroissement en x lorsque h tend vers 0. Ainsi f n'est pas dérivable en x.

Le réel x ayant été choisi quelconque, la fonction f (appelée fonction de Weierstraß), n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$, alors qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.