Lycée Carnot Mai 2006
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Correction du Devoir Maison n° 20

Exercice 1 – Étude détaillée d'une fonction

Soit $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$.

1. f est définie en tout point en lequel $x+1$ ne s'annule pas, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   Sur ce domaine, f est dérivable en tant que composé et quotient de fonctions dérivables, et :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1) - (x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

   De plus, les limites aux bords du domaine sont :
   - En $\pm\infty$, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   - En -1^- : $x+1$ tend vers 0, et f est négatif au voisinage à gauche de -1. Donc $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$.
   - En -1^+ : de même, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$.

   De plus $f(-3) = -8$ et $f(1) = 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La droite $y = -1$ est une asymptote verticale, au voisinage de $-\infty$ en -1^- et de $+\infty$ en -1^+.

   De plus, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x$. Donc la droite $y = x$ est une direction asymptotique (ce qui ne signifie pas qu'elle est asymptote, ni même qu'il existe une asymptote). Une droite asymptote en $+\infty$, si elle existe, est donc d'équation $y = x + b$. De plus,

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) - x = \frac{(x-1)^2 - x(x+1)}{x+1} = \frac{-2x+1-x}{x+1} = \frac{1-3x}{x+1}.$$

   Ainsi, $\lim\limits_{-\infty} f(x) - x = \lim\limits_{+\infty} f(x) - x = -3$. On en déduit que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Par ailleurs :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) - x + 3 = \frac{1 - 3x + 3x + 3}{x+1} = \frac{4}{x+1}.$$

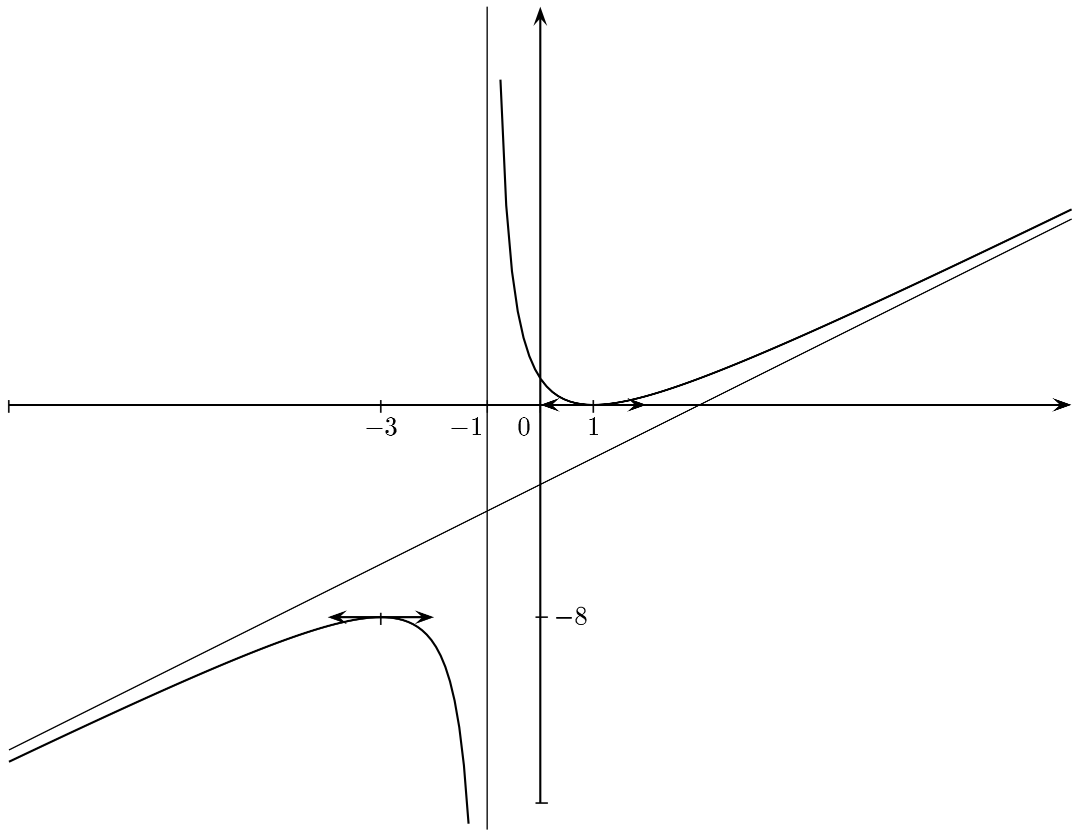
   Cette expression est négative si $x < -1$ et positive si $x > -1$. Ainsi, la courbe représentative de f est au-dessous de son asymptote $y = x - 3$ sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, et au-dessus sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

3. Les points d'inflexion annulent la dérivée seconde. Cherchons donc les zéros de la dérivée seconde, pour trouver les candidats à être points d'inflexions. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x-1)(x+3)}{(x+1)^3} = \frac{4x+2-4x+6}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

   Ainsi, f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donc f n'admet pas de point d'inflexion.

4. Le signe de f'' est négatif sur $]-\infty,-1[$ et positif sur $]-1,+\infty[$. Donc f est concave sur $]-\infty,-1[$ et convexe sur $]-1,+\infty[$.
5. On obtient le tracé suivant (attention, les échelles ne sont pas les mêmes sur les deux axes) :



Exercice 2 – Étude d'une suite définie par récurrence

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence suivante :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, et de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout x et y réels, on a donc :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons l'inégalité précédente à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$. Ainsi :

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|.$$

Cette utilisation de l'IAF pour les suites définies par récurrence est archi-classique ; il faut absolument retenir cette méthode.

2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0|$.

Or, $\sum \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0|$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente. On déduit alors du théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge, donc que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument. La convergence de cette dernière série équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. L'énoncé semble ne pas coller pour les premières valeurs. On cherche où est l'erreur.

   On calcule le reste de la série précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|u_n - \lim_{n\to+\infty} u_n\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}|u_{k+1}-u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^k}|u_1-u_0| = \frac{1}{2^{n-1}}|u_1-u_0| = \frac{1-\frac{\pi}{8}}{2^{n-1}}.$$

   Or, le seul point fixe de f est 0 (car f est concave sur $\mathbb{R}_+$, donc sous la tangente $y = \frac{x}{2}$, donc pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant \frac{x}{2} < x$, et de même sur $\mathbb{R}_-$). Comme f est continue, $(u_n)_su$ converge vers un point fixe de f, donc vers 0. De plus, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1-\frac{\pi}{8}}{2^{n-1}}.$$

   Voilà. Le concepteur de l'énoncé (moi...) avait oublié le facteur $\frac{1}{2}$ dans le calcul de u_1 !

4. On a majoré le terme positif u_n par le terme général d'une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant u_0 + \left(1-\frac{\pi}{8}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2\left(1-\frac{\pi}{8}\right) = 3 - \frac{\pi}{4}.$$

Problème – Polynômes de Tchebychev : le retour

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés analytiques des polynômes de Tchebychev. On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont les polynômes P_n, $n \in \mathbb{N}$, définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_0 = 1; \qquad P_1 = X; \\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 2. \end{cases}$$

1. **Révisions :** voir un DM antérieur. À savoir faire impérativement !

2. **Étude des racines de P_n et P_n'.**

   (a) Les racines dans $[-1,1]$ sont de la forme $r = \cos(\theta)$, pour une certaine valeur $\theta \in [0,\pi]$ (un intervalle sur lequel cos est une bijection sur $[-1,1]$). Ainsi,

$$0 = P_n(r) = P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

   Nous avons donc à résoudre l'équation en θ : $\cos(n\theta) = 0$. Les solutions de cette équation sont

$$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{soit} \qquad \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\cdot\pi, \qquad k \in \mathbb{N}$$

   Ainsi les solutions dans l'intervalle $[0,\pi]$ sont :

$$\left\{\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right\}.$$

   Les racines de P_n dans l'intervalle $[-1,1]$ sont donc :

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\}.$$

   (Attention, cos étant décroissant sur $[0,\pi]$, elles sont rangées en ordre décroissant). Cela fournit n racines distinctes de P_n. Comme P_n est de degré n, il a au plus n racines. Ce sont donc là toutes les racines de P_n.

(b) Appelons pour simplifier $r_1 < \cdots < r_n$ les n racines (distinctes) de P_n. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, on peut appliquer le théorème de Rolle appliqué sur l'intervalle $[r_k, r_{k-1}]$, car P_n est continue sur cet intervalle, dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant, en tant que fonction polynomiale. Il existe donc $s_k \in]r_k, r_{k+1}[$ tel que $P_n'(s_k) = 0$. Cela fournit $n-1$ racines de $P_n'(s_k)$ (on a bien défini des réels s_k distincts deux à deux, puisqu'ils sont dans les intervalles *ouvert* $]r_k, r_{k+1}[$). Comme P_n' est de degré $n-1$, il admet au plus $n-1$ racines. L'ensemble $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ fournit donc toutes les racines de P_n'. Par construction, ces racines sont toutes dans $[-1,1]$, et même dans $]-1,1[$.

(c) Ainsi, les racines de P_n' sont de la forme $s_k = \cos(\theta_k)$, avec $\theta_k \in [0, \pi]$, et même $\theta_k \in]0, \pi[$. De plus, soit $f_n(\theta) = P_n(\cos(\theta))$. Alors

$$f_n'(\theta) = -\sin(\theta) P_n'(\cos(\theta)).$$

Comme $\sin(\theta)$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, on en déduit que pour $\theta \in]0, \pi[$, θ est racine de f_n' si et seulement si $\cos(\theta)$ est racine de P_n'. Par conséquent, pour trouver les racines (sous la forme $\cos(\theta)$) de P_n', il suffit de trouver les racines de f_n'. Or, la question 1c donne une autre expression de f_n :

$$f_n(\theta) = \cos(n\theta), \qquad \text{d'où} \qquad f_n'(\theta) = -n\sin(n\theta).$$

Ainsi, les racines de f_n' sont (si $n \neq 0$) :

$$\left\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}\right\}$$

Par conséquent, les racines de P_n' sont (également rangées en ordre décroissant) :

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right\}$$

On savait déjà qu'on obtient ainsi toutes les racines de P_n'. Une petite vérification ne fait toutefois jamais de mal : on a bien $n-1$ racines, et elles sont bien réparties entre les racines de P_n.

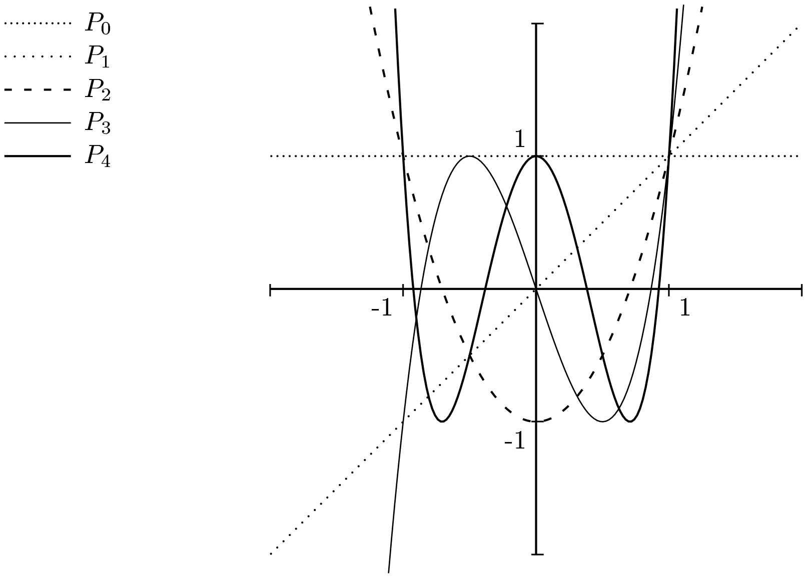
Remarque : Ce raisonnement est faux pour $n = 0$, d'ailleurs, le résultat lui-même est faux : dans ce cas, $P_0' = 0$ donc tout élément de $\mathbb{R}$ est racine de P_0'.

(d) Les extremas de P_n sont obtenus aux valeurs annulant la dérivée P_n', c'est-à-dire aux points $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Or, pour une telle valeur de k, d'après la question **??** :

$$P_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Attention, comme les racines de P_n' étaient rangées en ordre décroissant, le premier extremum rencontré est $(-1)^{n-1}$ et non $(-1)^{-1}$. Ainsi, P_n décroît de $+\infty$ à -1 (si n est pair) ou croît de $-\infty$ à 1 (si n est impair), puis oscille entre -1 et 1 ; le dernier extremum rencontré est -1 (quelque soit la parité de n), et P_n croît à partir de là jusqu'à $+\infty$.

(e) Je me dispense des tableaux de variation. La description ci-dessus est suffisante.



3. (a) Q est continue sur $[-1,1]$, car c'est une fonction polynomiale. Ainsi, $|Q|$ est continue sur un intervalle fermé borné : $|Q|$ est donc borné sur cet intervalle, et y atteint ses bornes. En d'autre terme, Q admet un minimum et un maximum sur $[-1,1]$. D'où l'existence de $M(Q) = \max\limits_{|x|\leqslant 1} |Q(x)|$.

   (b) i. $Q_n(1) = P_n(1) - 2^{n-1}Q(1) = 1 - 2^{n-1}Q(1) > 0$, car $Q(1) \leqslant M(Q) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   ii. $Q_n(-1) = P_n(-1) - 2^{n-1}Q(-1) = (-1)^n - 2^{n-1}Q(-1)$. Ainsi, $Q_n(-1) > 0$ si n est pair, et $Q_n(-1) < 0$ si n est impair. La raison : $|Q(-1)| \leqslant M(Q) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   iii. De même, aux extréma s_k, $k \in \{1,\dots,k-1\}$:

$$Q_n(s_k) = P_n(s_k) - 2^{n-1}Q(s_k) = (-1)^k - 2^{n-1}Q(s_k) \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ < 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{array} \right.$$

   (c) Notons $s_0 = 1$ et $s_n = -1$. Alors, on a $n+1$ réels tels que :

$$s_0 > s_1 > \ldots > s_{n-1} > s_n \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} f(s_k) > 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ f(s_k) < 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{array} \right.$$

   Q_n étant continue (fonction polynomiale), on peut appliquer le TVI sur chacun des intervalles $[s_{k-1}, s_k]$, pour $k \in [\![1,n]\!]$. Ainsi, il existe des réels $c_1,\dots,c_n$ vérifiant :

$$s_0 > c_1 > s_1 > c_2 > \ldots c_{n-1} > s_{n-1} > c_n > s_n \qquad \text{et} \qquad Q_n(c_1) = \cdots = Q_n(c_n) = 0.$$

   Ainsi, Q_n possède au moins n racines distinctes. Mais, Q_n étant une différence de polynômes de degré n, son degré est au plus n, et son coefficient de degré n est $2^{n-1} - 2^{n-1}\cdot 1 = 0$ (car le coefficient de degré n de P_n est 2^{n-1} et celui de Q est 1 puisqu'il est unitaire). Par conséquent, le degré d de Q_n est strictement plus petit que n. De plus, Q_n n'est pas le polynôme nul, car $Q_n(1) > 0$. Ainsi, Q_n admet au plus d racines, ce qui rentre en contradiction avec le fait d'avoir trouvé n racines distinctes. Conclusion : l'hypothèse de départ est fausse, et par conséquent, $M(Q) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

4. **Polynômes de Tchebychev et interpolation de Lagrange**.

   (a) Erratum : lire : "de degré $n-1$"

   Le polynôme P_f décrit dans l'énoncé est bien un polynôme de degré au plus $n-1$, et vérifie, pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$:

$$P_f(x_\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \prod_{i\neq k} \frac{x_\ell - x_i}{x_k - x_i} = f(x_\ell) \cdot \prod_{i \neq k} \frac{x_\ell - x_i}{x_\ell - x_i} = f(x_\ell).$$

En effet, si $k \neq \ell$, le terme indexé par $i = \ell$ dans le produit annule $x_\ell - x_i$, ainsi $\prod_{i \neq k} \frac{x_\ell - x_i}{x_k - x_i} = 0$. Le seul terme non nul dans dans somme correspond donc à l'indice $k = \ell$. Par conséquent, ce polynôme répond au problème, d'où l'existence de P_f.

Supposons que Q soit un autre polynôme de degré au plus $n-1$ tel que pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(x_\ell) = f(x_\ell)$. Alors le polynôme $P_f - Q$ est de degré au plus $n-1$ et s'annule en tous les points x_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc a au moins n racines. Comme il a plus de racine que son degré, il s'agit du polynôme nul, et donc $Q = P_f$. Cela démontre l'unicité.

Raisonnement classique, à savoir refaire.

(b) i. $F_x(x) = e_x P_n(x) - e_x P_n(x) = 0$.

ii. $F_x(x_k) = e_{x_k} P_n(x) - e_x P_n(x_k) = 0$, car :

- $f(x_k) = P_f(x_k)$ par définition de P_f, donc $e_{x_k} = 0$;
- $P_n(x_k) = 0$ puisque x_k est une racine de P_n.

(c) F_x est un fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque de classe $\mathcal{C}^n$ (on suppose $n \geqslant 1$). On peut donc appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles définis par les réels (x_k) et x. Ces $n+1$ réels sont deux à deux distincts, et définissent donc n intervalles en considérant deux réels consécutifs parmis ces $n+1$ réels. F_x est dérivable sur chaun de ces intervalles (fermés), et s'annule aux extrémités. D'après le théorème de Rolle, il existe donc une racine de F'_x dans chaque intervalle (ouvert). On obtient ainsi n racines distinctes de F'_x, toutes comprises entre -1 et 1.

En recommençant ainsi, on obtient $n-1$ racines distinctes de F''_x dans $[-1, 1]$ etc.. Au final, on obtient 2 racines distinctes de $F_x^{(n-1)}$ dans $[-1, 1]$, et une dernière application du théorème de Rolle entre ces racines (possible car F_x est de classe $\mathcal{C}^n$, donc $F_x^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et même de derivée continue, mais ça, c'est inutile) donne l'existence de $\alpha \in [-1, 1]$ (et même $\alpha \in]-1, 1[$) tel que $F_x^{(n)}(\alpha) = 0$.

(d) On a $F_x^{(n)}(t) = e_t^{(n)} P_n(x) - e_x P_n^{(n)}(t)$ (dérivation par rapport à t). Or :

i. $e_t = f(t) - P_f(t)$, donc $e_t^{(n)} = f^{(n)}(t) - P_f^{(n)}(t)$. Comme P_f est de degré $n-1$, $P_f^{(n)}(t) = 0$. Par conséquent, $e_t^{(n)} = f^{(n)}(t)$.

ii. P_n est de degré n. Ainsi, $P_n^{(n)}$ est une constante, obtenue en derivant n fois le monôme de plus haut degré de P_n, c'est-à-dire $2^{n-1}X^n$. Ainsi, $P_n^{(n)} = 2^{n-1}n!$.

Ainsi, $F_x^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) P_n(x) - e_x 2^{n-1} n!$. En spécialisant à la valeur α trouvée dans la question précédente, on obtient :

$$0 = f^{(n)}(\alpha) P_n(x) - e_x 2^{n-1} n!, \qquad \text{soit :} \qquad e_x = \frac{P_n(x)}{2^{n-1} n!} \cdot f^{(n)}(\alpha).$$

(e) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P_n(x)| \leqslant 1$. De plus, f étant de classe $\mathcal{C}^n$, $f^{(n)}$ est continue sur $[-1, 1]$, donc bornée : il existe M tel que $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$ sur $[-1, 1]$. Alors, $|f^{(n)}(\alpha)| \leqslant M$. Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$e_x \leqslant \frac{M}{2^{n-1} n!}.$$

Il s'agit d'une bonne approximation !

Remarque : Attention à la majoration de $f^{(n)}(\alpha)$; on ne peut pas prendre directement $M = f^{(n)}(\alpha)$ car α dépend de x. C'est pour cela que nous devons majorer $f^{(n)}$ sur $[-1, 1]$, afin d'obtenir une majoration indépendante de x.