

Devoir Maison n° 21 – d'après ESSEC 2003

Problème – Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel. À toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on associe l'application notée φf définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$.

Partie I – Généralités

1. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est intégrable sur $[x-1, x]$. Donc $\varphi(f)$ est bien définie. De plus, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x-1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes, $\varphi(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^0$. Ainsi, φ est une fonction de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^0$.

Montrons qu'il s'agit d'une application linéaire. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(f + \lambda g)(x) = \int_{x-1}^x f(t) + \lambda g(t) dt = \int_{x-1}^x f(t) dt + \lambda \int_{x-1}^x g(t) dt = \varphi(f)(x) + \lambda \varphi(g)(x).$$

Ainsi, φ est une application linéaire.

2. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Effectuons un changement de variables de classe $\mathcal{C}^1$ donné par : $u = t - x + 1$, $du = dt$. Alors :

$$\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt = \int_0^1 f(x + u - 1) du.$$

- (b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Alors, par un changement de variables $u = -t$, $du = -dt$, on obtient :

$$\varphi f(-x) = \int_{-x-1}^{-x} f(t) dt = - \int_{x+1}^x f(-u) du = \int_x^{x+1} f(u) du = \varphi f(x+1).$$

- (c) D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes, $\varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi f)'(x) = f(x) - f(x-1).$$

Ainsi, si f est croissante, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\varphi f)'(x) \geq 0$, et φf est donc croissante aussi. De même, si f est décroissante, φf est décroissante.

- (d) Soit f une fonction convexe.

Attention, on ne suppose pas que f est de classe $\mathcal{C}^2$, ni même dérivable. On ne peut donc utiliser que la définition de la convexité par inégalités.

Soit x et y deux réels, et $\lambda \in [0, 1]$. Alors :

$$\varphi f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \int_0^1 f(\lambda x + (1 - \lambda)y + u - 1) du.$$

Or, pour tout $u \in [0, 1]$, f étant convexe,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y + u - 1) = f(\lambda(x + u - 1) + (1 - \lambda)(y + u - 1)) \leq \lambda f(x + u - 1) + (1 - \lambda)f(y + u - 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \int_0^1 (\lambda f(x + u - 1) + (1 - \lambda)f(y + u - 1)) du \\ &= \lambda \int_0^1 f(x + u - 1) du + (1 - \lambda) \int_0^1 f(y + u - 1) du = \lambda \varphi f(x) + (1 - \lambda) \varphi f(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, φf est convexe.

On montrerait de la même façon que si f est concave, φf est concave.

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit Q une primitive de P . Alors Q est un polynôme de degré $n + 1$ au plus, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi P(x) = Q(x) - Q(x-1).$$

Ainsi, $\varphi P = Q(X) - Q(X-1)$. Or, $Q(X)$ et $Q(X-1)$ sont deux polynômes de même degré, et même coefficient dominant. Donc ce coefficient s'annule en faisant la différence, et par conséquent,

$$\deg(Q(X) - Q(X-1)) < \deg Q \leq n + 1.$$

Ainsi, $\varphi P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- (b) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et $f_j : x \mapsto x^j$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi f_j(x) &= \int_{x-1}^x f(u) \, du = \frac{1}{j+1} \left[u^{j+1} \right]_{x-1}^x \\ &= \frac{1}{j+1} (x^{j+1} - (x-1)^{j+1}) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \binom{j+1}{i} x^i \end{aligned}$$

La matrice de φ_n est donc la matrice $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$, définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{j+1} \binom{j+1}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure.

- (c) La matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc les coefficients diagonaux à savoir :

$$\text{Spec}(\varphi_n) = \left\{ \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{j}, j \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\} = \{1\}.$$

Ainsi, il n'y a qu'une valeur propre $\lambda = 1$. Déterminons l'espace propre associé à cette valeur propre. Tout d'abord, si f est la fonction constante, $\varphi(f)$ est la fonction qui à x associe

$$\int_{x-1}^x dx = 1.$$

Donc les polynômes constants sont vecteurs propres.

D'autre part, les coefficients au-dessus de la diagonale de la matrice de φ_n sont $\frac{-1}{j+1} \binom{j+1}{j-1} \neq 0$. Ainsi, la matrice $[\varphi_n] - I_{n+1}$ est une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont tous nuls, et dont les coefficients de la diagonale supérieure sont non nuls. Il s'agit donc d'une matrice échelonnée de rang n , son noyau est donc de dimension 1. Ainsi, $E_1(\varphi_n)$ est de dimension 1. On en déduit que $E_1(\varphi_n) = \mathbb{R}_0[X]$.

4. (a) On a déjà répondu à cette question. Le fait que φf soit de classe $\mathcal{C}^1$ provient du théorème de dérivation des fonctions dépendant de leurs bornes. Vu la façon dont est tournée la question, il peut être judicieux de redonner rapidement une justification. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (une telle primitive existe car f est continue sur $\mathbb{R}$). Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi f(x) = F(x) - F(x-1)$. Ainsi, d'après les règles usuelles de somme et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, φf est de classe $\mathcal{C}^1$, et d'après les règles de dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\varphi f)'(x) = F'(x) - F'(x-1) = f(x) - f(x-1).$$

- (b) Soit k un entier, et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. Alors φf est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée est donnée par l'expression de la question précédente. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $(\varphi f)'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ aussi, donc que φf est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Ainsi, $\varphi f \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$, pour tout $j \leq k + 1$.

Montrons qu'à l'inverse, pour tout $j > k + 1$, $\varphi(\mathcal{C}^k(\mathbb{R})) \not\subset \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$. Il faut donc trouver $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ telle que $\varphi f \notin \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$. Attention au fait qu'en général, dire que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^j$ ne suffit pas, car la somme de deux fonctions n'étant pas de classe $\mathcal{C}^j$ peut très bien être de classe $\mathcal{C}^j$. Il faut donc construire explicitement une fonction donnant un contre-exemple.

Le raisonnement précédent peut se faire si f est de classe $\mathcal{C}^j$ sauf en un unique point x_0 , car dans ce cas, $x \mapsto f(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^j$ en x_0 , et la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^j$ en x_0 et d'une

fonction qui ne l'est pas est une fonction qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^j$. Trouvons donc une telle fonction. Pour cela partons d'une fonction dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, sauf en un point) : la fonction $g : x \mapsto |x|$ par exemple. La fonction g étant continue, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$, elle-même continue, etc. On peut donc primitiver successivement k fois, jusqu'à obtenir une fonction f dérivable k fois et telle que $f^{(k)} = g$. La fonction g n'étant pas dérivable en 0, f n'est pas $k+1$ fois dérivable en 0. Ainsi, f n'est pas dans $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$. En revanche, elle est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Alors, de manière immédiate, d'après la formule de la question précédente, $(\varphi f)'$ n'est pas $k+1$ fois dérivable en 0 et en 1. Ainsi, $(\varphi f)'$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$, donc φf n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k+2}$ sur $\mathbb{R}$, donc pas de classe $\mathcal{C}^j$, $j > k+1$.

Par conséquent, si $j > k+1$, $\varphi(\mathcal{C}^k(\mathbb{R})) \not\subset \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$.

- (c) Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi f = 0$, donc aussi $(\varphi f)' = 0$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(x-1) = 0.$$

Ainsi, f est périodique. De plus, dire que $\varphi f = 0$ est dire que l'intégrale de f sur une période est nulle.

Réciproquement, soit f une fonction 1-périodique d'intégrale nulle sur une période. L'intégrale sur une période ne dépendant pas du choix de la période (cf cours), on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{x-1}^x f(t) \, dt = 0 \quad \text{soit:} \quad \varphi f = 0.$$

Ainsi, $f \in \text{Ker } \varphi$.

Donc, $\text{Ker}(\varphi)$ est constitué des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.

- (d) S'il s'agit de φ_n , comme semble l'indiquer le titre, il suffit de constater que $\text{Ker } \varphi_n = \text{Ker } \varphi \cap \mathbb{R}_n[x] = \{0\}$, car les polynômes non constants ne sont pas périodiques, et la seule constante d'intégrale nulle sur un intervalle de longueur 1 est 0. Ainsi φ_n est injective, et comme c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, φ_n est surjective.

S'il s'agit bien de φ , la non nullité du noyau indique que φ n'est pas injective. Cela n'est pas suffisant pour conclure quant à la surjectivité, car ici, on n'est pas sur un espace de dimension finie. Mais on peut constater que les fonctions continues non dérivables ne sont pas dans l'image de φ , ainsi, φ n'est pas surjective.

5. (a) Soit f une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda f(x) = \int_{x-1}^x f(t) \, dt = \varphi f(x)$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Initialisation : f est de classe $\mathcal{C}^0$ par hypothèse.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Alors, d'après la question (4b), φf est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Par conséquent, λf est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, et par conséquent, λ étant non nul, f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, d'après le principe de récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit P un polynôme fonction propre de φ , et soit n son degré. Alors P est aussi fonction propre de φ_n , et est donc constant. Ainsi, les seuls polynômes fonctions propres de φ sont les polynômes constants.
- (c) Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi f_a(x) = \int_{x-1}^x e^{at} \, dt = \frac{1}{a}(e^{a(x-1)} - e^{ax}) = e^{ax} \left(\frac{1}{ae^a} - 1 \right).$$

Ainsi, f est vecteur propre pour la valeur propre λ si et seulement si $\lambda = \frac{1}{ae^a} - 1$, donc si $ae^a = \frac{1}{\lambda+1}$. Comme $\frac{1}{\lambda+1} > 0$, cela impose $a > 0$. Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $a \mapsto ae^a$ est strictement croissante et continue. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, il existe une et une seule valeur de a telle que $ae^a = \frac{1}{\lambda+1}$, donc une et une seule valeur de a telle que f_a soit fonction propre associée à $\lambda > 0$.

On en déduit que tout réel $\lambda > 0$ est valeur propre (il existe un vecteur propre associé!) donc $\mathbb{R}_+^* \subset \text{Spec}(\varphi)$.

- (d) Soit $\lambda > 1$, et soit f une fonction bornée du sous-espace propre associé à λ . On a $\varphi f = \lambda f$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{x-1}^x f(t) dt = \lambda f(x).$$

Soit M la borne supérieure de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. Supposons que $M > 0$. Alors, puisque $\lambda > 1$, et par définition de la borne supérieure, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda|f(x)| > M$. Or :

$$\lambda|f(x)| = \left| \int_{x-1}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x-1}^x |f(t)| dt \leq \int_{x-1}^x M dt \leq M.$$

D'où une contradiction. Ainsi, $M = 0$, ce qui signifie que f est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\varphi)$ associé à la valeur propre 1.

Partie II – Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\varphi)$

1. (a) Montrons que pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f_0(\frac{1}{2} + x) = -f_0(\frac{1}{2} - x)$. C'est évident si $x = \pm\frac{1}{2}$, et sinon :

$$f_0\left(\frac{1}{2} + x\right) = x \exp\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\text{et } f_0\left(\frac{1}{2} - x\right) = -x \exp\left(\left(-\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) = -f_0\left(\frac{1}{2} + x\right).$$

- (b) f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, comme produit et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est continue en 0^+ et en 1^- , puisque la limite de $\frac{1}{x(x-1)}$ en ces points est $-\infty$, donc la limite de l'exponentielle est 0.

Ainsi, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f_0 , qui est le prolongement par continuité de $x \mapsto (x - \frac{1}{2}) \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

D'autre part, pour calculer l'intégrale, on exploite la symétrie de f_0 :

$$\int_0^1 f_0(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_0(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^0 f_0(1-u) du = \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(1-u) du,$$

par un changement de variables de classe $\mathcal{C}^1$, $t = 1 - u$. Or, d'après la symétrie de la courbe de f_0 prouvée dans la question (1a), pour tout $u \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_0(1-u) = -f_0(u)$, donc :

$$\int_0^1 f_0(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(t) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(u) du = 0.$$

2. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

C'est le cas pour f_0 . Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $x \mapsto \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt$ est une primitive de la fonction continue $t \mapsto f_n(t)e^{-t}$; il s'agit donc d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme l'exponentielle est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$, comme produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. De plus :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'_{n+1}(x) = f_n(1)e^x - e^x f_n(x)e^{-x} - e^x \int_0^x f_n(t)e^{-t} dt = f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

- (b) On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt = \int_0^1 f'_{n+1}(t) dt = [f_{n+1}(t)]_0^1 = f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0).$$

- (c) On a : $f_{n+1}(0) = f_n(1)e^0 - e^0 \int_0^0 f_n(t)e^{-t} dt = f_n(1)$.

On montre alors par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt$.

Pour $n = 0$, cela vient de la question (1b).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt$. Alors, d'après la question (2b),

$$\int_0^1 f_{n+1}(t) dt = \int_0^1 f_n(t) dt + f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = f_n(1) + f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = f_{n+1}(1),$$

la dernière égalité provenant du début de la question.

(d) Soit h la fonction :

$$\forall x \in [0, 1], \quad h(x) = \int_0^x f_{n+1}(t) dt + \int_x^1 f_n(t) dt.$$

h est dérivable d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant de leur borne, et :

$$\forall x \in [0, 1], \quad h'(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = f'_{n+1}(x).$$

De plus, $h(0) = \int_0^1 f_n(t) dt = f_n(1) = f_{n+1}(0)$. Ainsi, h et f_{n+1} ayant même dérivée sur l'intervalle $[0, 1]$, et coïncidant en un point, ces deux fonctions sont égales.

(e) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0, 1[$, f est continue sur $]n, n+1[$. De plus, f est continue en 0, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue à droite en n (car f_n est continue en 0) et de plus :

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} f_{n-1}(x - n - 1) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f_{n-1}(y) = f_{n-1}(1) = f_n(0) = f(n).$$

Ainsi, f est aussi continue à gauche en n . Ainsi, f est continue en tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, soit $x > 1$. Soit n tel que $x \in [n, n+1[$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{x-1}^x f(t) dt &= \int_{x-1}^n f(t) dt + \int_n^x f(t) dt = \int_{x-1}^n f_{n-1}(t - (n-1)) dt + \int_n^x f_n(t - n) dt \\ &= \int_{x-n}^1 f_{n-1}(t) dt + \int_0^{x-n} f_n(t) dt = f_n(x-n) = f(x). \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité résulte de la question (2d), la précédente résulte de deux changements de variables $u = t - (n-1)$ et $u = t - n$.

3. f et f' étant continues sur $[0, 1]$, f ainsi définie est continue sur $[-1, 0]$, et, comme on l'a déjà vu, sur $\mathbb{R}_+^*$ (on est obligé d'ôter la valeur 0, puisque maintenant, il faut vérifier la continuité à droite et à gauche). La continuité à droite en 0 provient de la continuité de f en 0 avant prolongement. Étudions la continuité à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x+1) - f'(x+1)) = \lim_{y \rightarrow 1^-} (f_0(y) - f'_0(y)).$$

Or, f_0 est continue en 1, et dérivable en 1 d'après (1b), de dérivée continue en 1, et égale à :

$$f'_0(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\exp \frac{1}{x(x-1)} - \frac{(x-\frac{1}{2})(2x-1)}{x^2(x-1)^2} \cdot \exp \frac{1}{x(x-1)} \right) = 0,$$

d'après les croissances comparées.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f_0(1) = 0 = f_0(0) = f(0)$. Par conséquent, f est continue à gauche en 0. On en déduit que f est continue en 0, puis donc sur $[-1, +\infty[$.

On a déjà démontré l'égalité demandée sur $[0, +\infty[$. Soit donc $x \in [-1, 0]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{x-1}^x f(t) dt &= \int_{x-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_{x-1}^0 f(t+1) dt - \int_{x-1}^0 f'(t+1) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_x^1 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt - f(1) + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

(l'intégrale est nulle d'après la question (1b))

Partie III – Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\varphi)$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle fermé borné $[n, n+1]$. Par conséquent, f y est bornée, et atteint ses bornes ; donc f admet un maximum M_n sur $[n, n+1]$, et l'atteint en un certain réel $x_n \in [n, n+1]$ (ce qui signifie $f(x_n) = M_n$).

(b) On suppose que $n \geq 1$.

- i. Si $x_n \in]n, n+1[$, f admet un maximum local en x_n , et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (d'après I-5a), donc, $f'(x_n) = 0$.

Je ne vois pas trop ce que ce calcul apporte, et je ne vois pas quoi dire de $f(x_{n-1})$. En revanche, on compare facilement $f(x_{n-1})$ et $f(x_n)$, et ceci sans avoir à utiliser la dérivée :

si $M_{n-1} < M_n$, on a :

$$\begin{aligned} M_n = f(x_n) &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) \, dt = \int_{x_{n-1}}^n f(t) \, dt + \int_n^{x_n} f(t) \, dt \\ &\leq \int_{x_{n-1}}^n M_{n-1} \, dt + \int_n^{x_n} M_n \, dt \leq (n - x_n + 1)M_{n-1} + (x_n - n)M_n < M_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une contradiction, donc $f(x_{n-1}) \geq f(x_n)$, c'est-à-dire $M_{n-1} \geq M_n$.

Remarquez que ceci est valable aussi si $x_n = n$, mais pas pour $x_n = n+1$, la dernière inégalité n'étant pas stricte dans ce cas.

- ii. Si $x_n = n+1$, alors $M_{n+1} = f(n+1) = \int_n^{n+1} f(t) \, dt$

Ainsi, $\int_n^{n+1} (M_n - f(t)) \, dt = 0$, alors que pour tout $t \in [n, n+1]$, $M_n - f(t) \geq 0$, et que cette fonction est continue.

Montrons que cela implique que $M_n - f$ est la fonction nulle. En effet, soit G une primitive de cette fonction. G est dérivable, et $G' = M_n - f$ sur $[n, n+1]$, et est donc positive. Ainsi, G est croissante. De plus,

$$0 = \int_n^{n+1} M_n - f(t) \, dt = G(n+1) - G(n).$$

Par conséquent, G est croissante sur $[n, n+1]$, et $G(n) = G(n+1)$. On en déduit que G est constante, puis que $M_n - f$ est la fonction nulle sur $[n, n+1]$.

À retenir : si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle, alors la fonction est nulle.

- (c) Dans le premier cas, y compris $x_n = n$, on a déjà montré que $M_{n-1} \geq M_n$. Dans le deuxième cas, f étant constante sur $[n, n+1]$, $M_n = f(n)$, et donc, $M_n \leq \max_{x \in [n-1, n]} f(x) = M_{n-1}$.

Ainsi, la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (d) De la même manière exactement, on montre que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n \leq M_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq m_n \leq M_n$, et m_0 est un minorant de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et de même, M_0 est un majorant de $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée : elle converge dans $\mathbb{R}$. De même pour la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante et majorée.

2. (a) Pour pouvoir dériver cette expression, il faut d'abord sortir le terme x de l'intégrale : **on ne sait dériver que les intégrales dont seules les bornes dépendent de x** . Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_x^{x+1} tf(t) \, dt - x \int_x^{x+1} f(t) \, dt.$$

Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes, et en tant que produit et somme d'expressions dérivables. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x) - \int_x^{x+1} f(t) \, dt - x(f(x+1) - f(x)) = f(x+1) - \varphi f(x+1) = 0,$$

la dernière égalité découlant du fait que $f \in E_1(\varphi)$.

Par conséquent, g est constante sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(0) = \int_0^1 tf(t) \, dt = \frac{L}{2}$.

- (b) Puisque $x \geq n$, il existe $N \geq n$ tel que $x \in [N, N+1]$. Alors, pour tout $t \in [x, x+1]$, $t \in [N, N+1]$, ou $t \in [N+1, N+2]$, donc $f(t) \leq M_N$ ou $f(t) \leq M_{N+1}$. Comme $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on obtient :

$$\forall t \in [x, x+1], f(t) \leq M_N \leq M_n, \quad \text{donc:} \quad M_n - f(t) \geq 0.$$

De plus, pour tout $t \in [x, x+1]$, on a : $0 \leq t - x \leq 1$, donc :

$$\forall t \in [x, x+1], 0 \leq (t - x)(M_n - f(t)) \leq M_n - f(t),$$

et en intégrant ces inégalités (et par croissance de l'intégrale) :

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t - x)(M_n - f(t)) dt \leq \int_x^{x+1} (M_n - f(t)) dt = M_n - \int_x^{x+1} f(t) dt = M_n - f(x+1),$$

puisque $f \in E_1(\varphi)$. Or, on a :

$$\int_x^{x+1} (t - x)(M_n - f(t)) dt = M_n \int_x^{x+1} (t - x) dt - g(x) = M_n \left[\frac{1}{2}(t - x)^2 \right]_x^{x+1} - \frac{L}{2} = \frac{M_n - L}{2}.$$

En prenant $x = x_{n+1} - 1 \in [n, n+1] \subset [n, +\infty[$ dans l'inégalité précédente, on obtient donc :

$$0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - f(x_{n+1}) = M_n - M_{n+1}.$$

- (c) On ne refait pas la totalité du raisonnement. On obtient cette fois, pour tout $x \geq n$,

$$0 \geq \int_x^{x+1} (t - x)(m_n - f(t)) dt \geq \int_x^{x+1} (m_n - f(t)) dt = m_n - \int_x^{x+1} f(t) dt = m_n - f(x+1),$$

En évaluant en $x'_{n+1} - 1$, où (x'_n) est la suite similaire à (x_n) pour les minima (donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x'_n \in [n, n+1]$ et $f(x'_n) = m_n$), on obtient :

$$0 \geq \frac{M_n - L}{2} \geq M_n - f(x'_{n+1}) = m_n - m_{n+1}.$$

Or $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, donc $(M_n - M_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(m_n - m_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0. En utilisant le théorème d'encadrement pour les deux encadrements trouvés, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n - L}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n - L}{2} = 0, \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = L.$$

Ainsi, le minimum et le maximum de f sur les intervalles f tendent vers une même limite L , autrement dit, f est de plus en plus écrasé entre deux valeurs tendant vers L , ce qui intuitivement implique que la limite de f est L .

Soyons plus rigoureux. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|M_n - L| < \varepsilon$, et $|m_n - L| < \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq N$, x est dans un intervalle du type $[n, n+1]$, avec $n \geq N$, donc :

$$L - \varepsilon < m_N \leq m_n \leq f(x) \leq M_n \leq M_N < L + \varepsilon.$$

On a ici encore utilisé la croissance de (m_n) et la décroissance de (M_n) .

Ainsi, on a vérifié la propriété définissant la convergence de f vers L en $+\infty$.

Partie IV – Recherche des fonctions bornées de $E_1(\varphi)$

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt = \int_{x-1}^x f(t)^2 dt - 2f(x) \int_{x-1}^x f(t) dt + f(x)^2 \int_{x-1}^x 1 dt \\ &= \varphi(f^2)(x) - 2f(x)f(x) + f(x)^2 = \varphi(f^2)(x) - f^2(x). \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité résulte du fait que $f \in E_1(\varphi)$.

(b) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question I-5a, et par conséquent, f^2 aussi, puis φf^2 aussi. On obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) &= \varphi(f^2)'(x) - 2f'(x)f(x) = f^2(x) - f^2(x-1) - 2(f(x) - f(x-1))f(x) \\ &= -f^2(x) - f^2(x-1) + 2f(x)f(x-1) = -(f(x) - f(x-1))^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, u_0 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) La fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'_n(x) = u_{n-1}(x) - u_{n-1}(x-1)$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la fonction u_n est décroissante.

On a fait l'initialisation pour u_0 dans la question précédente.

Soit donc $n \geq 1$ tel que u_{n-1} soit décroissante. Alors, d'après l'expression ci-dessus de la dérivée de u_n , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'_n(x) \leq 0$, donc u_n est une fonction décroissante.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que les fonctions u_n , $n \in \mathbb{N}$, sont toutes décroissantes sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit x un réel fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_{n-1} étant décroissante, on a, pour tout $t \in [x-1, x]$, $u_{n-1}(t) \geq u_{n-1}(x)$. Intégrons cette inégalité sur $[x-1, x]$, on obtient :

$$u_n(x) = \int_{x-1}^x u_{n-1}(t) dt \geq \int_{x-1}^x u_{n-1}(x) dt = u_{n-1}(x).$$

La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

- (c) La suite $u_n(x)$ est positive, car $u_0(x) \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive), et $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On obtient ainsi facilement la positivité de la somme.

La majoration est loin d'être évidente ; on démontre en fait par récurrence une propriété un peu plus forte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2 - f(x)^2 \gg.$$

Initialisons pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t))^2 dt - f(x)^2 \leq \int_{x-1}^x M dt - f(x)^2 = M^2 - f(x)^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n-1)$ soit vérifié. Alors, soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k(x) &= u_0(x) + \sum_{k=1}^n \int_{x-1}^x u_{k-1}(t) dt = u_0(x) + \int_{x-1}^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k(t) \right) dt \\ &= \int_{x-1}^x f(t)^2 dt + \int_{x-1}^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k(t) \right) dt - f(x)^2 = \int_{x-1}^x \left(f(t)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t) \right) dt - f(x)^2.\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $t \in [x-1, x]$, $(f(t))^2 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t) \leq M^2$, donc :

$$\sum_{k=0}^n u_k(x) \leq \int_{x-1}^x M^2 dt - f(x)^2 = M^2 - f(x)^2.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n-1)$ implique $\mathcal{P}(n)$.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2 - f(x)^2 \leq M^2.$$

- (d) À x fixé, la série $\sum u_n(x)$ est à termes positifs et de somme partielle bornée, donc elle converge. Son terme général $u_n(x)$ tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, $(u_n(x))$ est une suite positive, croissante, de limite nulle. Ce ne peut être le cas que s'il s'agit de la suite nulle, donc si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = 0$. Cela étant vrai pour tout x , on obtient que pour tout n , la fonction u_n est identiquement nulle.

En particulier, $u_0 = 0$. Or, $u_0(x)$ est définie comme l'intégrale d'une fonction continue et positive. Cette intégrale ne peut être nulle que si la fonction qu'on intègre est identiquement nulle sur l'intervalle d'intégration (raisonnement déjà fait dans ce devoir). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(t) - f(x))^2$ est nulle sur $[x, x+1]$, donc f est constante sur chaque intervalle $[x, x+1]$, donc f est constante sur $\mathbb{R}$.