Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Juin 2006

Correction du Devoir Maison n° 22 – Exercice 2

Exercice 2 –

1. **Intégrales de Wallis.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

(a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$; $\qquad I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

(b) Soit $n \geqslant 1$. Intégrons I_{n+1} par parties, en dérivant $\sin^n$ et en intégrant un facteur sin. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'intégration par partie est licite, et donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^n x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}x = n(I_{n-1} - I_{n+1}). \end{aligned}$$

En isolant I_{n+1} dans cette équation, on trouve $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.

(c) On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{H}(p)$: « $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ »
Initialisation : Pour $p = 0$, $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée ssi $I_0 = \frac{\pi}{2}$, ce qui provient de la question 1.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(p-1)$ soit vérifié. Alors, d'après la question 2,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2p(2p-1)}{4p^2} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}((p-1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

La propriété est donc héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
L'expression pour I_{2p+1} se démontre bien sûr de la même manière. Je propose une démonstration alternative (qui, pour être complètement rigoureuse, nécessiterait aussi une récurrence). Il s'agit bien sûr d'une autre façon de mettre en forme la même idée. D'après la question 2,

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{2p-2}{2p-3} I_{2p-3} = \cdots = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1} I_1 \\ &\frac{(2p(2p-2)\cdots 2)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^n x \leqslant \sin^{n+1} x$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, \mathrm{d}x \qquad \text{soit :} \qquad I_n \leqslant I_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent, pour tout $n \in NN^*$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, et de plus, puisque $I_{n-1} \geqslant I_n$, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}.$$

(e) On calcule la limite de $\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$ en calculant la limite des ses deux suites extraites des termes pairs et des termes impairs. Or :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4(p+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{4p^2}{2p(2p+1)}.$$

Ces deux suites extraites ont la même limite 1. Donc la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite en $+\infty$, égale à 1. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, et que cette limite est égale à 1.
Pour trouver la formule de Wallis, on exprime $\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}}$:

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p-1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2p-1)!}{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2} = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot\frac{2p^2}{2p}\cdot\pi = \left(\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2\cdot p\pi.$$

Cette expression tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède. Ainsi, en passant à la racine carrée, on obtient

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \ln\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}$.

   (a) On obtient, à l'aide de l'indication :

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \ln\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} - \ln\frac{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{(n-1)}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\mathrm{e}^{n-1}}\right)\\ &= \ln\left(\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

   (b) Il existe donc $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|S_{n+1}-S_n|\leqslant\dfrac{A}{n^2}$. Or, $\sum\dfrac{A}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum S_{n+1}-S_n$ est absolument convergente, donc convergente.
   Or, la somme partielle de cette série est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_{k+1}-S_k = S_{n+1}-S_1$. Ainsi, la convergence de la série est équvalente à la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers un réel fini S.

   (c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sigma_n = \mathrm{e}^{S_n}$, donc, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = \mathrm{e}^S$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \dfrac{(\mathrm{e}^S)^2}{\mathrm{e}^S} = \mathrm{e}^S$.
   De plus : $\dfrac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}} = \left(\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)^2\dfrac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}}$.
   D'après la question (1e), la limite de cette suite est $\sqrt{2\pi}$. Ainsi, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$, soit : $S = \ln\sqrt{2\pi}$.

   (d) La limite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\sqrt{2\pi}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},\quad\text{soit :}\quad\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}(1+o(1)),\quad\text{soit :}\quad n! = n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1)).$$