Devoir Maison n° 5 – Séries numériques

Problème 1 – Étude de séries dont le terme général est le reste d’une série convergente
(extrait de Concours communs polytechniques - concours national DEUG 2004)

Exemple 1

1. Justifions d’abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n existe. Cela provient de la convergence de la série $\sum a_n$, du fait qu’il s’agit d’une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

Calculons maintenant r_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

La deuxième égalité provient d’un changement d’indice $k' = k - (n + 1)$, l’avant-dernière provient de la formule de la somme des séries géométriques (à connaître par cœur).

Ainsi, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. D’après les résultats de convergence des séries géométriques, on en déduit que $\sum r_n$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Exemple 2

2. On pose, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.

- (a) $\sum a_n$ est une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$, avec $a = 2$, donc $a > 1$. D’après les règles de convergence des séries de Riemann, elle est donc convergente.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N un entier supérieur à 2 et à $n + 1$. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, f(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Soit $k \in \llbracket n + 1, N \rrbracket$. Alors, f étant décroissante sur $[k, k + 1]$, pour tout $t \in [k, k + 1]$, on a $f(k + 1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant cette inégalité sur tout l’intervalle $[k, k + 1]$ sur lequel elle est vraie, on obtient :

$$f(k + 1) = \int_k^{k+1} f(k + 1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k).$$

Cette double-inégalité étant vraie pour tout $k \in \llbracket n + 1, N \rrbracket$, on peut la sommer pour toutes les valeurs de $k \in \llbracket n + 1, N \rrbracket$:

$$\sum_{k=n+1}^N f(k + 1) \leq \sum_{k=n+1}^N \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^N f(k),$$

soit, en revenant à l’expression de f et en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{(k + 1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2},$$

(c) On calcule l'intégrale ci-dessus :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=n+1}^{t=N+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi, en injectant ce résultat dans la double-inegalité de la question précédente, et en faisant un changement d'indice dans la somme de gauche, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $N \geq n+1$:

$$\sum_{k=n+2}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Les limites de ces trois termes lorsque N tend vers $+\infty$ existent (pour les termes de gauche et de droite, il s'agit de l'existence de r_n et r_{n+1} , c'est-à-dire de la convergence de $\sum a_k$). On peut donc passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$. D'après le théorème de prolongement des inégalités, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_n - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+1} \leq r_n.$$

La première inégalité donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi, avec la seconde inégalité, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

(d) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| r_n - \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. Donc,

$$r_n - \frac{1}{n+1} = O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

On en déduit que $r_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

(e) Comme $r_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et que les séries considérées sont à termes positifs, par le théorème de comparaison de séries à termes positifs équivalents, $\sum r_n$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature. D'après les résultats de convergence des séries de Riemann, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum r_n$ diverge.

Exemple 3

On pose, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On note pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

3. Montrons que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0,$$

car la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0,$$

car la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n} - S_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

donc $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi, les deux suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite ; soit ℓ leur limite commune. Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe N_1 et N_2 tels que :

$$\forall n \geq N_1, |S_{2n} - \ell| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2, |S_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Alors : $\forall n \geq 2 \cdot \max(N_1, N_2), |S_n - \ell| < \varepsilon$.

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ : la série $\sum a_n$ est convergente.

4. Expression intégrale de r_n .

On définit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $1+x \geq 1$, donc $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

En intégrant cette inégalité, et par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\left(\frac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, on en conclut, d'après le théorème d'encadrement, que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Suivons l'indication :

$$\forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1+x}, \quad \text{donc} \quad \forall x \in [0, 1], (-1)^n \frac{x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k.$$

Intégrons cette égalité entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k dx \\ &= \left[\ln(1+x) \right]_{x=0}^{x=1} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \ln 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

(c) En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$0 = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{soit :} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour exprimer r_n , on remarquera que :

$$r_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ainsi : $r_n = -\ln 2 - (I_n - \ln 2) = I_n$.

5. Conclusion

(a) Intégrons I_n par parties, en considérant les fonctions u et v définies pour tout $x \in [0, 1]$ par :

$$u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ (**hypothèse à ne pas oublier de mentionner**), et :

$$\forall x \in [0, 1], \quad u'(x) = x^n \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

On peut donc intégrer par parties :

$$I_n = (-1)^n \left(\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \right) = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx.$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$, donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, $\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx = O\left(\frac{1}{(n+1)(n+1)}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puisque $\frac{1}{(n+1)(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

On en déduit donc que :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = I_n$, il s'agit de déterminer la nature de la série $\sum I_n$. Dans la question précédente, on a décomposé I_n en la somme de deux expressions ; étudions la convergence des séries correspondant à chacune de ces expressions.

- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$ est égale (par un changement d'indice) à la série $-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n}$. Or, on a

montré que cette série converge dans la question 3. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$ converge.

- La série $\sum \left(I_n - \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \right)$ converge absolument d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. En effet, d'après la question précédente, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I_n - \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \right| \leq \frac{M}{n^2}.$$

Or, $\sum \frac{M}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. On en déduit la convergence de $\sum \left| I_n - \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \right|$

par le TCSTP, donc la convergence absolue de $\sum \left(I_n - \frac{(-1)^n}{2(n+1)} \right)$.

Par conséquent, $\sum I_n$ (et donc $\sum r_n$) est la somme de deux séries convergentes, elle est donc convergente.

Problème 2 – Quelques règles pour l'étude de la semi-convergence

1. Cas des séries alternées

(a) Nous allons montrer que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$

car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0,$$

car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1}$, dont la limite est 0 par hypothèse.

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, dont convergent vers une limite ℓ . Comme dans le problème précédent (raisonnement par ε), on en déduit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ . Ainsi, $\sum (-1)^n a_n$ converge.

- (b) i. Convergence de $\sum (-1)^n \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)$.

La première chose à faire est bien sûr d'étudier la convergence absolue. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)$. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\sin \frac{1}{n} \geq 0$. Ainsi, $a_n \geq 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc à termes positifs. Comme $(\sin \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de limite nulle,

$$\ln \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \sin \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc d'après le théorème de comparaison par équivalences des séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge, donc $\sum (-1)^n a_n$ ne converge pas absolument.

Étudions la semi-convergence.

Attention, gardez-vous bien de raisonner par équivalents pour la semi-convergence : ce n'est pas une série à termes positifs.

- La suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme la fonction $x \mapsto \sin x$ est croissante sur cet intervalle, la suite $(\sin \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme la fonction $\ln$ est croissante, on en déduit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- Comme $\sin$ et $\ln$ sont continues, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right) = \ln \left(1 + \sin \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \right) = \ln 1 = 0$.

Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante de limite nulle. Donc d'après la question précédente, $\sum (-1)^n a_n$ est semi-convergente.

- ii. Convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$.

La suite $(\ln(\ln n))$ est définie pour $n \geq 2$, et $\ln(\ln n) \geq 0$ si $\ln n \geq 1$ c'est-à-dire si $n \geq e$, donc, puisque n est entier, si $n \geq 3$. Nous étudions la série $\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$.

Étude de la convergence absolue. D'après les règles de croissance comparée, la suite $\left(\frac{n}{\ln(\ln n)} \right)_{n \geq 3}$ tend vers $+\infty$. Donc, il existe N tel que :

$$\forall n \geq N, \frac{n}{\ln(\ln n)} \geq 1, \quad \text{donc :} \quad \forall n \geq N, \frac{1}{\ln(\ln n)} \geq \frac{1}{n}.$$

D'après le TCSTP, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$ diverge.

Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ n'est pas absolument convergente.

Étude de la semi-convergence.

- La suite $\left(\frac{1}{\ln(\ln n)} \right)_{n \geq 2}$ est de limite nulle.
- D'après la croissance du logarithme et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$, la suite $\left(\frac{1}{\ln(\ln n)} \right)_{n \geq 3}$ est décroissante. Remarquez qu'on est obligé de considérer la suite à partir de $n = 3$, pour s'assurer que tous les termes sont dans le domaine de croissance de la fonction inverse.

Ainsi, d'après la question 1, quitte à poser $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ est semi-convergente.

- iii. Convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Ne vous lancez pas tête baissée dans le théorème des suites adjacentes. Il est très maladroit d'utiliser ce théorème si la série est absolument convergente, comme c'est le cas ici. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, et ceci est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Donc la série est absolument convergente. Le théorème des suites adjacentes, quoique applicable dans cette situation, n'est donc d'aucun intérêt ici.

2. Règle d'Abel

- (a) On introduit les termes de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'expression de S_n , en constatant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = T_k - T_{k-1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$,

$$\begin{aligned} S_p - S_n &= \sum_{k=n+1}^p a_k b_k = \sum_{k=n+1}^p a_k (T_k - T_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^p a_k T_k - \sum_{k=n+1}^p a_k T_{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^p a_k T_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} T_k = \sum_{k=n+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) T_k + a_p T_p - a_{n+1} T_n. \end{aligned}$$

- (b) Attention à ne pas majorer « à l'intérieur d'une valeur absolue ». Il faut toujours d'abord utiliser l'inégalité triangulaire. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$. Alors :

$$\begin{aligned} |S_p - S_n| &\leq \sum_{k=n+1}^{p-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot |T_k| + |a_p| \cdot |T_p| + |a_{n+1}| \cdot |T_n| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{p-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot M + |a_p| \cdot M + |a_{n+1}| \cdot M. \end{aligned}$$

Or, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle (donc positive), ainsi, pour tout $k \in \llbracket n+1, p-1 \rrbracket$, $a_k - a_{k+1} \geq 0$, et $a_p \geq 0$, $a_{n+1} \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |S_p - S_n| &\leq \sum_{k=n+1}^{p-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot M + a_p \cdot M + a_{n+1} \cdot M = M \left(\sum_{k=n+1}^{p-1} a_k - \sum_{k=n+2}^p a_k + a_p + a_{n+1} \right) \\ &= (a_{n+1} - a_p + a_p + a_{n+1})M = 2M a_{n+1}. \end{aligned}$$

Il y a donc une petite erreur d'indice dans l'énoncé, sans grande conséquence pour la suite.

- (c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n = |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq n$, $|S_n - S_p| < \varepsilon$. En inversant éventuellement le rôle de n et p , on obtient donc :

$$\forall n \geq N, \forall p \geq N, |S_n - S_p| < \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle est donc convergente : la série $\sum a_n b_n$ converge.

- (d) Exemple 1 : dans cette situation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-1)^n$, et par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{2n} = 1, \text{ et } T_{2n+1} = 0.$$

Ainsi, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et on peut donc appliquer la règle d'Abel, qui donne exactement la règle de convergence des séries alternées.

- (e) Exemple 2 :

- i. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = e^{i\theta n}$. Il suffit, d'après la règle d'Abel, de montrer que la somme partielle $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la série $\sum b_n$ est bornée. Or $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$ (car $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \sum_{k=0}^n b_k = \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|T_n| \leq \frac{1 + |e^{i\theta(n+1)}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

On a donc trouvé un majorant (indépendant de n) de $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est donc bornée. Par application de la règle d'Abel, la série complexe $\sum a_n e^{i\theta n}$ est convergente.

ii. Dans les deux exemples $\theta = 1$ donc $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

A. Convergence de $\sum e^{in} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante de limite nulle, ce qui provient du fait que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ et de limite 0, et que la fonction $\sin$ est croissante sur cet intervalle, continue en 0, de valeur 0. D'où la convergence de la série.

Précisons que la convergence n'est pas absolue, puisqu'on a l'équivalence suivante entre suites positives : $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente : ainsi,

$\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

B. Convergence de $\sum e^{in} \left(\cos \frac{1}{n} - 1\right)$.

Là l'utilisation du théorème d'Abel est très maladroite, car la série est absolument convergente ! On obtient donc sa convergence avec très peu d'effort, en déterminant un équivalent du module du terme général :

$$\left| e^{in} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right| = 1 - \cos \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

d'après les équivalents classiques (qu'il faut connaître !). Or, $\sum \frac{1}{2n^2}$ est, à une constante multiplicative près, une somme de Riemann convergente, donc, d'après le théorème de comparaison par équivalents des séries à termes positifs, $\sum e^{in} (\cos \frac{1}{n} - 1)$ est absolument convergente.

iii. Soit, pour tout $n \geq 2$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \frac{z^n}{2^n \ln n} = \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\ln n}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < 2$, alors pour tout $n \geq 3$, $|u_n(z)| = \frac{r^n}{\ln n} \leq r^n$, où $r = \frac{|z|}{2} < 1$. Comme $\sum r^n$ est une série géométrique positive de raison strictement inférieure à 1, elle converge. Ainsi, d'après le TCSTP, $\sum |u_n(z)|$ converge, donc $\sum u_n(z)$ converge absolument.
- Si $|z| > 2$, alors, pour tout $n \geq 2$, $|u_n(z)| \geq \frac{r^n}{\ln n} = \frac{e^{n \ln r}}{\ln n}$, où $r = \frac{|z|}{2} > 1$. D'après les croissances comparées, $\left(\frac{r^n}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$, donc $(|u_n(z)|)_{n \geq 2}$ aussi. Ainsi, $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement.
- Si $z = 2$, alors pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{\ln n}$, et on reconnaît une série de Bertrand divergente.

On refait la démonstration SVP : pour tout $n \geq 2$, $\sqrt{n}u_n(2) = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, et d'après les croissances comparées, $\lim \sqrt{n}u_n(2) = +\infty$. En utilisant la définition de la divergence vers $+\infty$ avec $A = 1$, on obtient :

$$\exists N \geq 2, \forall n \geq N, \sqrt{n}u_n \geq 1, \quad \text{soit :} \quad u_n(2) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} \leq 1$, donc divergente. D'après le TCSTP, on en déduit que $\sum u_n(2)$ diverge. La divergence n'est pas grossière.

- Si $|z| = 2$, et $z \neq 2$, il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = 2e^{i\theta}$. Alors, pour tout $n \geq 2$, $u_n(z) = \frac{e^{ic\theta}}{\ln n}$. Comme $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ est décroissante de limite nulle, on peut utiliser le théorème d'Abel, dans le cas où $(b_n) = e^{i\theta}$ (exemple 2). Ainsi, $\sum u_n(z)$ converge. Cette convergence n'est pas absolue, puisque $\sum |u_n(z)| = \sum u_n(2)$ et que cette série diverge.

(f) Exemple 3 :

- i. Cela découle immédiatement de ce qu'on a fait dans l'exemple précédent. Soit toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = e^{i\theta n}$, et $b'_n = \cos(\theta n)$ et $b''_n = \sin(\theta n)$. Notons $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(T'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les sommes partielles de $\sum b_n$, $\sum b'_n$ et $\sum b''_n$. Alors, d'après la question précédente, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |T_n| \leq M.$$

Donnons-nous une telle valeur de M . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b'_n = \operatorname{Re}(b_n)$ et $b''_n = \operatorname{Im}(b_n)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, par additivité de la partie réelle et de la partie imaginaire, on obtient : $T'_n = \operatorname{Re}(T_n)$ et $T''_n = \operatorname{Im}(T_n)$. Or, pour tout nombre complexe z , $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|T'_n| = |\operatorname{Re}(T_n)| \leq |T_n| \leq M \quad \text{et} \quad |T''_n| = |\operatorname{Im}(T_n)| \leq |T_n| \leq M.$$

Ainsi, les deux suites $(T'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. On peut donc utiliser la règle d'Abel avec $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi qu'avec $(b''_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sous les hypothèses convenables sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cela donne donc la convergence de $\sum a_n \cos(\theta n)$ et de $\sum a_n \sin(\theta n)$.

- ii. On applique la règle d'Abel, avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \sin n$ et $a_n = \frac{1}{n}$. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien décroissante de limite nulle, et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés requises d'après la question précédente. D'où la convergence de la série $\sum \frac{\sin n}{n}$. Le but des questions suivantes est de montrer que cette convergence n'est pas absolue.

- iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^2 n \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si $|\sin n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, si et seulement si n est dans l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \pmod{\pi}$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sin^2(3i+2) < \frac{1}{2}$. Alors il existe $x \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ tel que $3i+2 \equiv x \pmod{\pi}$. Puisque $0 < \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$:

- si $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, alors $x+1 \in [1, \frac{\pi}{4}+1] \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Ainsi, $\sin^2(3i+3) = \sin^2(x+1) \geq \frac{1}{2}$;
- si $x \in [\frac{-\pi}{4}, 0]$, alors $x-1 \in [\frac{\pi}{4}-1, -1] \subset [\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}]$. Ainsi, $\sin^2(3i+1) = \sin^2(x-1) \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi, soit $\sin^2(3i+2) \geq \frac{1}{2}$, soit un de ces deux cas de figure est vrai, c'est-à-dire $\sin^2(3i+1) \geq \frac{1}{2}$ ou $\sin^2(3i+3) \geq \frac{1}{2}$. Par conséquent, il existe $n \in \{3i+1, 3i+2, 3i+3\}$ tel que $\sin^2 n \geq \frac{1}{2}$.

- iv. Soit $i \in \mathbb{N}$, et $n \in \{3i+1, 3i+2, 3i+3\}$ tel que $\sin^2 n \geq \frac{1}{2}$. Une telle valeur de n existe d'après la question précédente. Alors, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes positifs :

$$u_{3i+1} + u_{3i+2} + u_{3i+3} \geq u_n = \frac{\sin^2 n}{n} \geq \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2(3i+3)},$$

puisque $n \leq 3i+3$.

- v. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la somme partielle associée à la série $\sum u_n$. Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs. Elle est donc soit convergente (dans $\mathbb{R}_+$), soit divergente vers $+\infty$. Montrons que $(S_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en regroupant les termes trois par trois :

$$S_{3n} = \sum_{i=0}^{n-1} S_{3i+1} + S_{3i+2} + S_{3i+3}.$$

Or, ceci est la somme partielle d'une série dont le terme général est positif et vérifie :

$$\forall i \in \mathbb{N}, S_{3i+1} + S_{3i+2} + S_{3i+3} \geq S_n \geq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n+1},$$

où n est un entier de $\{3i+1, 3i+2, 3i+3\}$ tel que $S_n \geq \frac{1}{6(n+1)}$.

Ainsi, son terme général étant minoré par le terme général de la série de Riemann divergente $\frac{1}{6} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, elle diverge, d'après le TCSTP.

Ainsi, $(S_{3n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. On en conclut que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers une limite finie. On peut, pour le justifier sérieusement, utiliser la définition de la convergence. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , alors, en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $S_n \leq \ell + 1$. En particulier, pour tout $n \geq N$, on a $3n \geq N$, donc $S_{3n} \leq \ell + 1$, ce qui contredit la convergence de $(S_{3n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers $+\infty$, en prenant $A = \ell + 1$ dans la définition. Ainsi, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne convergeant pas vers une limite finie, et étant croissante, elle converge vers $+\infty$. Par conséquent, $\sum u_n$ diverge.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $|\sin n| \leq 1$, on a $\frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{|\sin n|}{n}$. D'après le TCSTP, puisque la série à termes positifs $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$ diverge, il en est donc de même de $\sum \frac{|\sin n|}{n}$. Ainsi, $\sum \frac{\sin n}{n}$ ne converge pas absolument. Elle est donc seulement semi-convergente.

Exercice –

1. Nature de $\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$. Étudions d'abord la divergence grossière de la série $\sum u_n$, en calculant la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} = \frac{\ln n}{\ln e^n + \ln(1 - e^{-n})} = \frac{\ln n}{n + \ln(1 - e^{-n})}.$$

Or, $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(\ln(1 - e^{-n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Ainsi, $\ln(1 - e^{-n}) = o(n)$. On en déduit l'équivalent suivant en $+\infty$:

$$n + \ln(1 - e^{-n}) \underset{+\infty}{\sim} n, \quad \text{donc :} \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

D'après les résultats de croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Ainsi, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

Au passage, on a trouvé un équivalent simple de $\sum u_n$. Comme cet équivalent $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite positive, on peut utiliser le théorème de comparaison de deux séries à termes positifs équivalents : les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{\ln n}{n}$ sont de même nature.

On reconnaît là une série de Bertrand divergente. Comme les séries de Bertrand ne sont pas au programme, il faut rapidement redonner l'argument, d'autant qu'ici il est particulièrement simple. En effet pour tout $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$, donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. D'après le TCSTP, la série $\sum \frac{1}{n}$ étant une série de Riemann divergente, la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge. Ainsi $\sum u_n$ diverge.

2. Nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Étudions d'abord la divergence grossière de $\sum u_n$. Cela résulte de la remarque suivante : $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qu'on a déjà montré en TD. Je refais la démonstration rapidement :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{n!}{n^n} = \prod_{i=1}^n \frac{i}{n} = \prod_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{i=2}^n \frac{i}{n} \leq \frac{1}{n},$$

puisque pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $0 \leq \frac{i}{n} \leq 1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant en outre positive, cela implique que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, il en est donc de même que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ n'est donc pas grossièrement divergente.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on peut arranger un tout petit peu le raisonnement ci-dessus pour montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \prod_{i=3}^n \frac{i}{n} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à termes positifs, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après le corollaire du TCSTP, puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc convergente, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

3. Nature de la série $\sum (\ln \cos \frac{1}{n})(\ln \sin \frac{1}{n})$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (\ln \cos \frac{1}{n})(\ln \sin \frac{1}{n})$. Pour commencer, constatons que $\sum u_n$ est une série à termes positifs : En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos \frac{1}{n}$ et $\sin \frac{1}{n}$ sont dans $]0, 1]$; ainsi, $\ln \cos \frac{1}{n} \leq 0$ et $\ln \sin \frac{1}{n} \leq 0$; par conséquent $u_n \geq 0$.

Étudions maintenant la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Tout d'abord, trouvons un équivalent de $\ln \cos \frac{1}{n}$. Comme la limite de $(\cos \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est 1, on a :

$$\ln \cos \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos \frac{1}{n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi, les séries concernées étant à termes positifs, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{-1}{2n^2} \ln \sin \frac{1}{n}$.

De plus, pour tout $x \in [1, \pi/2]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \leq \frac{\pi n}{2}$, et, le logarithme étant croissant sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq -\ln \sin \frac{1}{n} \leq \ln \frac{\pi n}{2} = \ln n + \ln \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln \frac{\pi}{2}}{n^2}$. La série $\ln \frac{\pi}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ converge, car il s'agit d'une série de Riemann de paramètre $2 > 1$. La série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge également. En effet, considérons la suite $\left(n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Cette suite tend vers 0 d'après les croissances comparées. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^2} \leq 1, \quad \text{soit :} \quad \forall n \geq N, \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Les séries concernées étant à termes positifs, on peut appliquer le TCSTP. La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc convergente. Ainsi, $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

Par conséquent, $\sum \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln \frac{\pi}{2}}{n^2}$ est la somme de deux séries convergentes, elle est donc convergente. D'après le TCSTP une nouvelle fois, on en déduit que $\sum u_n$ converge. Ouf !

4. Nature de la série $\sum n^{\frac{1}{n}} - 1$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$ et $\frac{1}{n} > 0$, donc $n^{\frac{1}{n}} \geq 1$; ainsi, $u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc à termes positifs.

On obtient facilement un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En effet, $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, donc :

$$u_n = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

La série $\sum u_n$ étant à termes positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{\ln n}{n}$ sont donc de même nature, d'après le théorème de comparaison de deux séries à termes positifs équivalents. De plus on a déjà montré plus haut que $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge. Donc la série $\sum u_n$ diverge.