Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch Novembre 2005

Correction du Devoir Maison n° 6 – Autour des séries génératrices

On admet dans tout le problème que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$,

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) \right) \frac{x^n}{n!}. \qquad (1)$$

Questions préliminaires

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > a$. Alors $\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) = 0$ car un des facteurs de ce produit, correspondant à l'indice $i = a \in [\![0, n-1]\!]$ est nul. Ainsi, tous les termes de la somme correspondant à des indices $n > a$ sont nuls : la somme est en fait finie et vaut :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{a} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) \right) \frac{x^n}{n!}.$$
Ainsi, il s'agit d'un polynôme de degré a.
Pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$, le terme général de rang n de la série est nul pour tout $n > a$. Ainsi, la suite des sommes partielles est stationnaire, donc converge. Ainsi, la série converge pour toute valeur $x \in \mathbb{R}$.
La formule que l'on obtient est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^a = \sum_{n=0}^{a} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{a} \binom{a}{n} x^n.$$
Il ne s'agit donc de rien d'autre que la formule du binôme.

2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) \right) \frac{x^n}{n!}$. Puisque $a \notin \mathbb{N}$, tous les termes du produit sont non nuls, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On peut donc considérer le quotient suivant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \left(\prod_{i=0}^{n} (a-i) \right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a-i) \right)} \right| = \left| \frac{(a-n)x}{n} \right|.$$
Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$.
Nous nous appuyons alors sur la méthode de la démonstration de la règle de d'Alembert.
   - Si $|x| < 1$, soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < r < 1$. Par définition des limites avec $\varepsilon = r - |x| > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leqslant r$.
   Soit $(v_n)_{n \geqslant N}$ la suite géométrique de raison r de premier terme (de rang N) égal à $v_N = |u_N|$. Alors pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant v_n$. En effet :
   Initialisation : $|u_N| = v_N$ par initialisation de $(v_n)_{n \geqslant N}$;
   Hérédité : Soit $n \geqslant N$ tel que $|u_n| \leqslant v_n$. Alors $|u_{n+1}| \leqslant r|u_n| \leqslant r|v_n| = |v_{n+1}|$.
   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n$. Or, $\sum v_n$ est une série géométrique de raison $r \in [0, 1[$, donc convergente. D'après le TCSTP, on obtient donc la convergence de $\sum |u_n|$, donc la convergence absolue de $\sum u_n$.
   - De même, si $|x| > 1$, soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $1 < r < |x|$, alors il existe une suite géométrique positive $(v_n)_{n \geqslant N}$ de raison $r > 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n$. Ainsi, comme $(v_n)_{n \geqslant N}$ tend vers $+\infty$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi, donc elle ne tend pas vers 0. La série $sumu_n$ est donc grossièrement divergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(a-i)\right)\frac{x^n}{n!} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(-1-i)\right)\frac{x^n}{n!} = \left(\prod_{i=1}^{n}(-i)\right)\frac{x^n}{n!} = (-1)^n\frac{n!}{n!}x^n = (-x)^n.$$

On obtient donc la formule suivante : $\forall x \in]-1,1[,\quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$.

Il s'agit de la formule des sommes des séries géométriques.

(b) Si $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 : $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $x = -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 : $\sum u_n$ diverge grossièrement.

4. *On suppose que* $a = \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On exprime u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\prod_{i=0}^{n-1}(a-i)\right)\frac{x^n}{n!} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{2}-i)\right)\frac{x^n}{n!} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(1-2i)\right)\frac{x^n}{2^n n!} = \left(\prod_{i=1}^{n-1}-(2i-1)\right)\frac{x^n}{2^n n!} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)\right)\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n n!} = -\frac{(2n-2)!}{2\cdot 4\cdot(2n-2)}\cdot\frac{(-x)^n}{2^n n!} = -\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\cdot\frac{(-x)^n}{2^n n!} = -2\Gamma_{n-1}\cdot\frac{(-x)^n}{4^n}. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant un changement de variable $y = -x$ dans la formule, on trouve :

$$\forall y \in]-1,1[,\quad \sqrt{1-y} = u_0 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\Gamma_{n-1}\cdot\frac{y^n}{4^n} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\Gamma_{n-1}\cdot\frac{y^n}{4^n}.$$

Désolé pour le facteur 2 qui manquait dans l'énoncé.

PARTIE I – Propriétés élémentaires des séries génératrices.

1. **Convergence**

(a) Si $|x| > R$, par caractérisation des bornes inférieures, il existe $y \in E$ tel que $R < y < |x|$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g^n y^n| \leqslant |g^n x^n|$. Or, par définition de E, la suite $(|g^n y^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc $(|g^n x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus. Ainsi, elle ne converge pas vers 0. Par conséquent, la série $\sum g_n x^n$ est grossièrement divergente.

(b) Si $|x| < R$, il existe $r \in]|x|, R[$. Alors, par définition de la borne inférieure, $(|g_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |g_n r^n| \leqslant M$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |g_n x^n| = |g_n r^n| \cdot \left|\dfrac{x}{r}\right|^n \leqslant M\left|\dfrac{x}{r}\right|^n$.
Or, $\sum \left|\frac{x}{r}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{x}{r}\right| \in [0,1[$. Ainsi, elle est convergente. D'après le TCSTP, on en déduit que $\sum |g_n x^n|$ converge, donc $\sum g_n x^n$ converge absolument.

(a) Le rayon de convergence, s'il n'est pas infini, est la seule valeur $R \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-R, R[$, la série définissant $G(x)$ converge, et pour tout x tel que $|x| > R$ elle diverge. Or, d'après les questions préliminaires :

i. si $a \in \mathbb{N}$, la série (1) converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $R = +\infty$;

ii. si $a \notin \mathbb{N}$, la série (1) converge pour tout x tel que $|x| < 1$, et diverge pour tout x tel que $|x| > 1$. Ainsi, $R = 1$.

(b) La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$ (série exponentielle, voir le cours). Donc $R = +\infty$.
Déterminons les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\sum n!x^n$ converge. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!x^n$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x|.$$

Ainsi, si $x \neq 0$, $((n+1)|x|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Donc : $\exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\ \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 2$.

Soit $(v_n)_{n\geqslant N}$ la suite géométrique de raison 2 initialisée par $v_N = |u_N|$. Alors, comme précédemment, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| \geqslant v_n \geqslant 0$. Comme (v_n) tend vers $+\infty$, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, la seule valeur de x pour laquelle la série converge est $x = 0$. Donc le rayon de convergence est $R = 0$.

3. **Étude de la convergence en R et $-R$**

(a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}$. Alors,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 \ln(1+\frac{1}{n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|u_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|x|^n}{n^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les séries étant à termes positifs, la nature de $\sum |u_n x^n|$ est la même que la nature de $\sum v_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{|x|^n}{n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. On peut donc considérer le quotient suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|^n} = |x| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = |x|$.

En utilisant la même méthode que dans les questions préliminaires (règle de d'Alembert), on obtient le résultat suivante : $\sum v_n$ converge si $|x| < 1$ et $\sum v_n$ diverge grossièrement si $|x| > 1$. Ainsi, si $|x| < 1$, $\sum |u_n x^n|$ converge, donc $\sum u_n x^n$ converge absolument ; si $|x| > 1$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $(|u_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus, puisque ces deux suites sont équivalentes. Ainsi, $\sum u_n x^n$ diverge grossièrement.

Remarquez que je suis obligé de passer par la divergence grossière pour obtenir la divergence de $\sum u_n x^n$, car les critères usuels sur les séries à termes positifs ne permettent *a priori* que d'obtenir la non convergence absolue.

Par conséquent, le rayon de convergence est $R = 1$.

Étude en 1. On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, et les séries sont à termes positifs. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$. La convergence est forcément absolue, puisque la série $\sum u_n$ est à termes positifs.

Étude en -1. On étudie la convergence absolue de la série $\sum(-1)^n u_n$, ce qui revient à étudier la convergence de $\sum u_n$. On vient de montrer la convergence de cette série, donc $\sum(-1)^n u_n$ converge absolument.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = 2^n x^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq 0$. On peut donc considérer le quotient suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = 2|x|.$$

En utilisant la même méthode que dans les questions préliminaires (règle de d'Alembert), la série $\sum u_n(x)$ converge absolument si $2|x| < 1$, donc $|x| < \frac{1}{2}$, et diverge grossièrement si $|x| > \frac{1}{2}$. Ainsi, le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$.

Étude en $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\frac{1}{2}) = 1$, donc $\sum u_n(\frac{1}{2})$ diverge grossièrement.

Étude en $-\frac{1}{2}$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(-\frac{1}{2}) = (-1)^n$, donc $\sum u_n(-\frac{1}{2})$ diverge grossièrement.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ est non nul, on peut donc considérer le quotient suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot |x|.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|$. Par la même méthode que pécédemment, le rayon de convergence est donc $R = 1$.

Étude en 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(1) = \frac{1}{n}$. Or, $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann de paramètre 1, donc divergente.

Étude en -1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n}$. La série $\sum u_n(-1)$ ne converge pas absolument puisque $\sum |u_n(-1)| = \sum \frac{1}{n}$, et que cette série diverge. Montrons qu'elle est semi-convergente.

Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}$. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n} \geqslant 0,$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = -\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} \leqslant 0,$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{2n+1} - S_{2n} = -\dfrac{1}{2n+1}.$

Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$. Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition des limites, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N_1, \ |S_{2n} - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N_2, \ |S_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geqslant 2\max(N_1, N_2)$, $|S_n - \ell| < \varepsilon$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite, ce qui est équivalent à dire que $\sum u_n(-1)$ converge.

4. **Continuité en** 0

(a) Par définition de la borne inférieure R de E, la suite $(|g_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n r^n| \leqslant M$. Alors,

$$\forall x \in]-r, r[, \ |g_n x^n| = |g_n r^n| \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{r}\right|^n.$$

(b) Pour tout $x \in]-r, r[$, les séries étant absolument convergentes, on a :

$$G(x) - g_0 = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} g_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n x^n| \leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{x}{r}\right|^n = \frac{M\left|\frac{x}{r}\right|}{1 - \left|\frac{x}{r}\right|}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque x tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, $G(x) - g_0$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Comme $g_0 = G(0)$, cela équivaut à dire que G est continue en 0.

5. **Unicité**

(a) Pour tout $x \in [0, r[$,

$$\begin{aligned}\frac{G(x) - g_0 - \cdots - g_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}} &= \frac{1}{x^{n_0}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n - \sum_{n=0}^{n_0-1} g_n x^n\right) = \\ &= \frac{1}{x^{n_0}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} g_n x^n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} g_n x^{n-n_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_{n+n_0} x^n.\end{aligned}$$

Ainsi, il s'agit de la série génératrice de la suite $(g_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}^*}$. D'après la question précédente, elle est continue en 0, de valeur g_{n_0}. Ainsi, $\dfrac{G(x) - g_0 - \cdots - g_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}}$ admet une limite lorsque x tend vers 0, et cette limite est g_{n_0}.

(b) Par la définition de n_0 (minimalité), pour tout $n < n_0$, $g_n = h_n$. Ainsi, puisque G et H sont égales sur $[0, r[$:

$$\forall x \in [0, r[, \ \frac{G(x) - g_0 - \cdots - g_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}} = \frac{H(x) - h_0 - \cdots - h_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}}$$

En utilisant la question précédente, valable pour G, mais également pour H, on en déduit :

$$g_{n_0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{G(x) - g_0 - \cdots - g_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{H(x) - h_0 - \cdots - h_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}} = h_{n_0}.$$

Par conséquent, $g_{n_0} = h_{n_0}$, ce qui contredit la définition de n_0.
On en déduit que l'hypothèse intiale était fausse. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = h_n$.

PARTIE II – Fonctions génératrices et récurrences.

1. **Suite de Fibonacci.**

(a) De manière évidente, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, puis croissante, ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $f_n = f_{n-1}+f_{n-2} \leqslant 2f_{n-1}$. Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n \leqslant 2^n$, donc $0 \leqslant f_n \dfrac{1}{4^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit, d'après le TCSTP, que $\sum f_n \frac{1}{4^n}$ converge. D'après la question I-1, on en déduit que $R \geqslant \frac{1}{4}$.

(b) Soit $x \in]-R, R[$. Alors :

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^{n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} f_{n-2} x^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}(f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n + f_0 + f_1 x - f_0 x = x,\end{aligned}$$

car $f_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$.

(c) Le discriminant du polynôme $1 - X - X^2$ est 5. Ainsi, les racines sont :

$$\varphi_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Soit λ_1 et λ_2 deux réels. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\varphi_1, \varphi_2\}$; alors :

$$\frac{\lambda_1}{x-\varphi_1} + \frac{\lambda_2}{x-\varphi_2} = \frac{\lambda_1(x-\varphi_1)+\lambda_2(x-\varphi_2)}{x^2+x-1} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)x - (\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2)}{x^2+x-1}.$$

Ainsi, pour que $\dfrac{x}{1-x-x^2} = \dfrac{\lambda_1}{x-\varphi_1} + \dfrac{\lambda_2}{x-\varphi_2}$, il suffit que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= -1\\ \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 &= 0\end{cases}$$

On procède par substitution : de l'équation 1, on tire $\lambda_2 = -1 - \lambda_1$, d'où, d'après la deuxième équation,

$$0 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = \lambda_1\varphi_1 - (1+\lambda_1)\varphi_2 = \lambda_1(\varphi_1 - \varphi_2) - \varphi_2 = -\lambda_1\sqrt{5} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-\varphi_2}{\sqrt{5}}$, puis $\lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\varphi_1}{\sqrt{5}}$. Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{x-\varphi_1} - \frac{1+\sqrt{5}}{x-\varphi_2}\right).$$

(d) On utilise la relation (1) :

i. $\forall x,\ |x| < |\varphi_1|$, $\dfrac{\lambda_1}{x-\varphi_1} = -\dfrac{\lambda_1}{\varphi_1}\dfrac{1}{1-\frac{x}{\varphi_1}} = -\dfrac{\lambda_1}{\varphi_1}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\varphi_1}\right)^n$.

ii. $\forall x,\ |x| < \varphi_2$, $\dfrac{\lambda_2}{x-\varphi_2} = -\dfrac{\lambda_2}{\varphi_2}\dfrac{1}{1-\frac{x}{\varphi_2}} = -\dfrac{\lambda_2}{\varphi_2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\varphi_2}\right)^n$.

Puisque $|\varphi_1| < |\varphi_2|$, on en déduit que pour tout x tel que $|x| < |\varphi_1|$,

$$\begin{aligned}F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} &= -\frac{\lambda_1}{\varphi_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\varphi_1}\right)^n - \frac{\lambda_2}{\varphi_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\varphi_2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\varphi_1^{n-1}} + \frac{\lambda_2}{\varphi_2^{n-1}}\right)x^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda_1(-\varphi_2)^{n-1}}{(-\varphi_2\varphi_1)^{n-1}} + \frac{\lambda_2(-\varphi_1)^{n-1}}{(-\varphi_2\varphi_1)^{n-1}}\right)x^n\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lambda_1(-\varphi_2)^{n-1} + \lambda_2(-\varphi_1)^{n-1}\right)x^n\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}((-\varphi_2)^n - (-\varphi_1)^n)x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)x^n\end{aligned}$$

Comme cette série est la somme de deux séries convergentes si $|x| < |\varphi_1|$, elle est convergente dans ce cas. Si $|x| \in]|\varphi_1|, |\varphi_2|[$, elle est la somme d'une série convergente et d'une série divergente ; elle est donc divergente. Ainsi, le rayon de convergence est $|\varphi_2| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(e) D'après l'unicité du développement en série de $\frac{x}{1-x-x^2}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

2. **Une récurrence non linéaire.**

(a) On montre par récurrence d'ordre 2 sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « g_n est entier. »
$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vrais par l'initialisation de la suite.
Soit $n \geqslant 2$. Si $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$ sont vraies, alors puisque g_{n-1} et g_{n-2} sont entier, et puisque $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n$, g_n est donc entier en tant que somme d'entiers. Donc $\mathcal{P}(n)$ est vérifié.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est entier.

(b) On montre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$: « $g_n \geqslant 1$ » par récurrence d'ordre 2 sur n.
L'initialisation est évidente du fait de l'initialisation de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{Q}(n-1)$ et $\mathcal{Q}(n-2)$ soient vraies. Alors

$$g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n \geqslant 1 + 2 - 1 = 2 \geqslant 1.$$

Ainsi, $\mathcal{Q}(n)$ est vrai. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \geqslant 1$.

(c) Soit $n \geqslant 2$. Alors de la relation de récurrence, on tire :

$$g_n - g_{n-1} = 2g_{n-2} + (-1)^n \geqslant 2 - 1 = 1 > 0.$$

De plus, $g_1 - g_0 = 0 \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} - g_n \geqslant 0$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

(d) Si $n = 1$, $g_n = 1 \leqslant 4 = 4g_{n-1}$. Soit $n \geqslant 2$. Alors

$$g_n = 2g_{n-2} + g_{n-1} + (-1)^n \leqslant 3g_{n-1} + 1 \leqslant 4g_{n-1}.$$

La première inégalité provient de la croissance de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la deuxième de la question 2b.

(e) On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $|g_n x^n| \leqslant 4^n |x|^n$. Or, si $|x| < \frac{1}{4}$, $\sum 4^n |x|^n$ est une série géométrique de raison $4|x| \in]-1, 1[$, donc convergente. Les séries étant à termes positifs, d'après le TCSTP, $\sum |g_n x^n|$ converge si $|x| \leqslant \frac{1}{4}$. Donc $\sum g_n x^n$ converge absolument si $|x| < \frac{1}{4}$.
D'après l'étude de la convergence des séries génératrices, $R \geqslant \frac{1}{4}$, donc $R > 0$.

(f) De plus, $(g_n)_s u$ est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \geqslant g_0 = 1$. Ainsi, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers 0. Donc $\sum g_n$ diverge grossièrement. D'après les résultats de l'étude de la convergence des séries génératrices, on en déduit que $R \leqslant 1$.

(g) Pour tout $x \in]-R, R[$, on a les égalités suivantes, justifiées par le fait que les séries convergent :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n = g_0 + g_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} g_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} (g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n) x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} g_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} g_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n x^n. \\
&= 1 + x \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} g_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n - g_1 x - 1 + x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} g_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + x.
\end{aligned}$$

(h) On déduit de la question précédente que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + x = xG(x) + 2x^2 G(x) + \frac{1}{1+x} + x.$$

Ainsi : $\forall x \in]-R, R[,\ G(x)(1-x-2x^2) = \dfrac{1+x+x^2}{1+x}$.

Donc : $\forall x \in]-R, R[,\ G(x) = \dfrac{1+x+x^2}{(1-x-2x^2)(1+x)} = \dfrac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2}$.

(i) Première méthode : mettre tout sur le même dénominateur, et obtenir un système 3×3 par identification des coefficients. Cela demande un peu de calculs.

Deuxième méthode (Astuce !) : je ruse un peu. Essayez de retenir la méthode, elle peut vous éviter certains calculs.

Supposons qu'il λ, μ et ν tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, -1\}$, on ait :

$$\frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2} = \frac{\lambda}{1-2x} + \frac{\mu}{(1+x)} + \frac{\nu}{(1+x)^2}. \tag{2}$$

Alors, en multipliant (2) par $1-2x$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, -1\}$,

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2} = \lambda + (1-2x)\left(\frac{\mu}{(1+x)} + \frac{\nu}{(1+x)^2}\right).$$

Si on prend la limite de cette expression lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\lambda = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{(1+\frac{1}{2})^2} = \frac{7}{9}.$$

De même, en multipliant par $(1+x)^2$ et en prenant la limite en -1, on obtient :

$$\nu = \frac{1+(-1)+(-1)^2}{(1-2(-1))} = \frac{1}{3}.$$

Enfin, en évaluant (2) en 0, on obtient : $1 = \lambda + \mu + \nu$, donc $\mu = -\dfrac{1}{9}$.

On a ainsi obtenu les seules valeurs possibles de λ, μ et ν. Nous n'avons pas encore montré que ces valeurs conviennent effectivement, puisque nous avons supposé, pour les trouver, qu'elles existaient. Il faut donc vérifier que les valeurs trouvées conviennent. Il ne s'agit de rien d'autre que d'une vérification facile, consistant à mettre tous les termes du second membre sur le même dénominateur. Vous pouvez vous dispenser de faire la vérification par écrit ; en revanche, précisez qu'il faut la faire.

Cette méthode, accompagnée de quelques autres astuces, est très efficace lorsqu'on s'est entraîné un peu, pour décomposer une fraction rationnelle. Nous aurons l'occasion de la revoir.

(j) On peut bien sûr utiliser (1) comme mentionné dans l'énoncé. Mais il n'est pas inutile de constater que dans ce cas ($\alpha \in \mathbb{Z}_-$), il s'agit de la formule du binôme négatif, prouvée dans le cours. Ainsi, le raisonnement qui suit repose sur des résultats entièrement justifiés. On obtient, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ (dans ce cas, toutes les séries convergent) :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+x)^2} \\
&= \frac{7}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(-x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{9}2^n - \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(-1)^n(n+1)\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{9}2^n + \frac{2}{9}(-1)^n + \frac{n}{3}(-1)^n\right) x^n.
\end{aligned}$$

(k) Par unicité de la décomposition en série (question I-5), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n.$$

3. **Suites mutuellement récurrentes.**

(a) Il s'agit d'une récurrence d'ordre 2 immédiate. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$, et $v_n \geqslant 0$ ».
$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies par l'initialisation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vrais. Alors :
- $u_{n+2} = 2v_{n-1} + u_{n-2} \geqslant 0$,
- $v_n = u_{n-1} + v_{n-2} \geqslant 0$.

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives.

(b) On montre par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_{2n+1} = 0$ et $v_{2n} = 0$ ».
$\mathcal{P}(0)$ est vrai puisque $u_1 = 0$ et $v_0 = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Alors :
- $v_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 0$, donc $v_{2n+2} = u_{2n+1} + v_{2n} = 0$;
- Ainsi, $v_{2n+2} = 0$ et $u_{2n+1} = 0$, donc $u_{2n+3} = 2v_{2n+2} + u_{2n+1} = 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives. D'après les relations définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} - u_{2n} = 2v_{2n+1} \geqslant 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n+3} - v_{2n+1} = u_{2n+2} \geqslant 0$.

Ainsi, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

(d) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \geqslant u_0 = 1$. Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent pas vers 0. Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. Par les propriétés de convergence vues dans la partie I, il en résulte que le rayon de convergence R_1 de la série définissant U vérifie $R_1 \leqslant 1$.
De même, $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum v_n$ diverge grossièrement, puis $R_2 \leqslant 1$.

(e) On montre par récurrence d'ordre 2 sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 3^n$ et $v_n \leqslant 3^n$ ». L'initialisation $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ est évidente.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vérifiés. Alors :
- $u_{n+2} = 2v_{n+1} + u_n \leqslant 2 \cdot 3^{n+1} + 3^n \leqslant 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+1} = 3^{n+2}$;
- $v_{n+2} = u_{n+1} + v_n \leqslant 3^{n+1} + 3^n \leqslant 3^{n+2}$.

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) Soit $x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n x^n| \leqslant (3|x|)^n$.
La série $\sum (3|x|)^n$ est une série géométrique de raison $3|x| \in]-1, 1[$, donc convergente. D'après le TCSTP, $\sum u_n x^n$ converge absolument. D'après les résultats de convergence de la partie I, on en déduit que $R_1 \geqslant \frac{1}{3}$.
Le même raisonnement montre que $R_2 \geqslant \frac{1}{3}$.

(g) Soit $x \in]-R, R[$. Alors :

$$\begin{aligned}
U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n &= u_0 + u_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (2v_{n-1} + u_{n-2}) x^n \\
&= 1 + 2\sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+2} \\
&= 1 + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n - 2xv_0 + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = 1 + 2xV(x) + x^2 U(x).
\end{aligned}$$

On fait de même pour l'autre relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n &= v_0 + v_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} (u_{n-1} + v_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-2} x^n = x + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+2} \\
&= x + x\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - xu_0 + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = xU(x) + x^2 V(x).
\end{aligned}$$

(h) Il s'agit d'un système 2×2 à résoudre. Soit $x\in]-R,R[$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(1-x^2)U(x)-2xV(x) & = & 1\\ (x^2-1)V(x)+xU(x) & = & 0\end{array}\right.$$

En substituant la valeur de $V(x)$ trouvée de la deuxième équation dans la première, on trouve :

$$(1-x^2)^2U(x)-2x^2U(x)=1-x^2,\qquad \text{d'où}\qquad U(x)=\frac{1-x^2}{1-4x^2+x^4}=\frac{1-x^2}{(x^2-(2+\sqrt{3}))(x^2-(2-\sqrt{3}))}.$$

De même, en substituant la valeur de $U(x)$ trouvée de la deuxième équation dans la première, on trouve :

$$(1-x^2)^2V(x)-2x^2V(x)=x,\qquad \text{d'où}\qquad U(x)=\frac{x}{1-4x^2+x^4}=\frac{x}{(x^2-(2+\sqrt{3}))(x^2-(2-\sqrt{3}))}.$$

(i) On utilise la même méthode que plus haut.
Supposons qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $y\in\mathbb{R}\setminus\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$,

$$\frac{1-y}{(y-(2+\sqrt{3}))(y-(2-\sqrt{3}))}=\frac{a}{y-(2+\sqrt{3})}+\frac{b}{y-(2-\sqrt{3})}.\tag{3}$$

En multipliant (3) par $y-(2+\sqrt{3})$ et en prenant la limite lorsque y tend vers $2+\sqrt{3}$, on obtient :

$$a=\frac{1-2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

En multipliant (3) par $y-(2-\sqrt{3})$ et en prenant la limite lorsque y tend vers $2-\sqrt{3}$, on obtient :

$$b=\frac{1-2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

Une simple vérification montre que ces deux valeurs conviennent. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{(x^2-(2+\sqrt{3}))(x^2-(2-\sqrt{3}))}&=-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(x^2-(2+\sqrt{3}))}+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(x^2-(2-\sqrt{3}))}\\&=-\frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(x^2(2-\sqrt{3})-1)}+\frac{(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(x^2(2+\sqrt{3})-1)}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}(1-x^2(2-\sqrt{3}))}+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}(1-x^2(2+\sqrt{3}))}.\end{aligned}$$

On fait de même pour la série V :
Supposons qu'il existe $c,d\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $y\in\mathbb{R}\setminus\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$,

$$\frac{1}{(y-(2+\sqrt{3}))(y-(2-\sqrt{3}))}=\frac{c}{y-(2+\sqrt{3})}+\frac{d}{y-(2-\sqrt{3})}.\tag{4}$$

En multipliant (4) par $y-(2+\sqrt{3})$ et en prenant la limite lorsque y tend vers $2+\sqrt{3}$, on obtient :

$$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

En multipliant (4) par $y-(2-\sqrt{3})$ et en prenant la limite lorsque y tend vers $2-\sqrt{3}$, on obtient :

$$b=\frac{1}{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Une simple vérification montre que ces deux valeurs conviennent. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x^2-(2+\sqrt{3}))(x^2-(2-\sqrt{3}))}&=\frac{x}{2\sqrt{3}(x^2-(2+\sqrt{3}))}-\frac{x}{2\sqrt{3}(x^2-(2-\sqrt{3}))}\\&=\frac{(2-\sqrt{3})x}{2\sqrt{3}(x^2(2-\sqrt{3})-1)}-\frac{(2+\sqrt{3})x}{2\sqrt{3}(x^2(2+\sqrt{3})-1)}\\&=\frac{(3-2\sqrt{3})x}{6(1-x^2(2-\sqrt{3}))}+\frac{(3+2\sqrt{3})x}{6(1-x^2(2+\sqrt{3}))}.\end{aligned}$$

(j) Les séries sont forcément convergentes pour tout $x \in]-R, R[$. Soit donc $x \in]-R, R[$. En utilisant (1) (ce qui n'est autre que la formule des sommes géométriques ici),

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(2-\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(2+\sqrt{3})^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n \right) x^{2n} \end{aligned}$$

Ainsi, par l'unicité des développements,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n \right) \\ &= \left(\frac{(2-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{(2+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} \right) \\ &= \left(\frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}} + \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{(3-2\sqrt{3})x}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(2-\sqrt{3})^n + \frac{(3+2\sqrt{3})x}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(2+\sqrt{3})^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n + \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n \right) x^{2n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par l'unicité des développements,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n+1} = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n + \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n.$$

PARTIE III – Convolutions

1. (a) Soit $x \in [0, R[$. Alors, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs, il en est de même de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une somme de termes positifs. Donc $\sum w_n x^n$ est une série à termes positifs. Ses sommes partielles sont donc croissantes, et convergent donc vers un réel fini ou vers $+\infty$.
Soit de plus $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$W_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} u_i x^i v_{k-i} x^{k-i} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant 2n} u_i v_{k-i} x^k = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=i}^{2n} u_i v_{k-i} x^k = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-i} u_i v_k x^{k+i}.$$

Comme tous les termes sont positifs, en en rajoutant dans la somme interne, on obtient :

$$W_{2n}(x) \leqslant \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} u_i v_k x^{k+i} = \sum_{i=0}^{2n} u_i x^i \sum_{k=0}^{2n} v_k x^k = U_{2n}(x) V_{2n}(x).$$

De même, en supprimant maintenant certains termes de la somme,

$$W_{2n}(x) \geqslant \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{2n-i} u_i v_k x^{k+i} \geqslant \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} u_i v_k x^{k+i},$$

cette dernière inégalité résultant du fait que pour tout indice i dans cette somme $2n - i \geqslant n$. Ainsi,

$$W_{2n}(x) \geqslant \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} u_i v_k x^{k+i} = \sum_{i=0}^{n} u_i x^i \sum_{k=0}^{n} v_k x^k = U_n(x) V_n(x).$$

De plus, en enlevant certains termes de la somme double, on obtient de même :

(b) Or, puisque $x \in [0, R[$, $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $U(x)$, donc aussi $(U_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, et de même, $(V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $V(x)$, donc aussi $(V_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Par les règles de produit de limites, et d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $(W_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $U(x)V(x)$.
Ainsi $W(x)$ est défini pour tout $x \in [0, R[$ (ce qui implique que le rayon de convergence de W est au moins égal à R), et $W(x) = U(x)V(x)$.

2. **Exemple 1 : une convolution de Fibonacci.**

(a) En élevant l'expression trouvée en II-1c au carré, on trouve, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}
F(x)^2 &= \frac{1}{20}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{(x-\varphi_1)^2} - \frac{6+2\sqrt{5}}{(x-\varphi_2)^2} - \frac{8}{1-x-x^2}\right) \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1}{(x-\varphi_1)^2} + \frac{3+\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1}{(x-\varphi_2)^2} - \frac{2}{5x}F(x) \\
&= \frac{(3-\sqrt{5})\varphi_1^2}{10}\cdot\frac{1}{1+\varphi_1 x} + \frac{(3+\sqrt{5})\varphi_2^2}{10}\cdot\frac{1}{1+\varphi_2 x} - \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^{n-1} \\
&= \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}}{20}\cdot\frac{1}{1+\varphi_1 x} + \frac{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}\cdot\frac{1}{1+\varphi_2 x} - \frac{2}{5}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^{n-1} \\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\varphi_1 x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\varphi_2 x} - \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} x^n \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-x\varphi_1)^n + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-x\varphi_2)^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}x^n \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)((-\varphi_1)^n + (-\varphi_2)^n) - 2f_{n+1})x^n.
\end{aligned}$$

Il y avait une regrettable erreur dans l'énoncé : φ_1 et φ_2 ne représentaient pas les racines de $1-X-X^2$ mais de X^2-X-1, ce qui justifie le fait qu'on ait un signe supplémentaire par rapport à l'énoncé. On continue avec les notations de la partie I.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((-\varphi_1)^n - (-\varphi_2)^n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2f_{n+1} - f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((-2\varphi_1 - 1)(-\varphi_1)^n - (-2\varphi_2 - 1)(-\varphi_2)^n) = (-\varphi_1)^n + (-\varphi_2)^n.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$F^2(x) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)(2f_{n+1} - f_n) - 2f_{n+1})x^n. = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(2nf_{n+1} - (n+1)f_n)x^n.$$

(c) Or, pour tout $x \in]-R, R[$, $F(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n\right)$, donc, d'après la question III-1b, $F(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k}\right)x^n$. D'après l'unicité du développement en série (question II-5), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k} = \frac{2nf_{n+1} - (n+1)f_n}{5}.$$

3. **Exemple 2 : une convolution de Catalan.**

(a) On montre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « cette relation définit de manière unique c_n. »
$\mathcal{P}(0)$ est vrai par l'initialisation de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vrai pour tout $k < n$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$ est bien définie et unique, et cette expression détermine de manière unique c_n. Donc $\mathcal{P}(n)$ est vrai.
D'après le principe de récurrence, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie de cette manière.

(b) Soit $x \in]-R,R[$. D'après la question III-1b,

$$xC(x)^2 = x\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^k = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-1-k} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = C(x) - c_0 = C(x) - 1.$$

Alors, $xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$. Résolvons cette équation du second degré en $C(x)$, de discriminant $1-4x$. Si $x > \frac{1}{4}$, cette équation n'admet pas de solution : $C(x)$ n'est donc pas défini. Ainsi, on obtient en passant que $R \leqslant \frac{1}{4}$.

Par conséquent, $x \leqslant \frac{1}{4}$, et l'équation admet deux solutions :

$$C_1(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \qquad \text{et} \qquad C_2(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

La limite de $C_2(x)$ lorsque x tend vers 0 est l'infini, ce qui contredit la continuité en 0 de C. Ainsi, la bonne solution est C_1 :

$$\forall x \in]-R,R[,\ C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

(c) D'après la question Préliminaire-4, pour tout $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, on a :

$$-\sqrt{1-4x} = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_{n-1} x^n.$$

Ainsi : $\forall x \in]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}[,\ C(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma_n x^n$.

Par l'unicité du développement (question II-5), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = G_n$.

(d) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \Gamma_n x^n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)x}{n(n+1)^2}\right|.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 4|x|$. En s'inspirant de la méthode de d'Alembert, qu'on a déjà illustrée dans ce devoir, on en déduit donc que $\sum u_n(x)$ converge absolument si $|x| < \frac{1}{4}$, et diverge grossièrement si $x > \frac{1}{4}$. Par conséquent, le rayon de convergence de G est $R = \frac{1}{4}$.

(e) D'après la question Préliminaire-5, pour tout $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, $G(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

D'après ce qui a été vu plus haut, cette fonction est solution pour tout $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ de l'équation $xG(x)^2 - G(x) + 1$.

(f) On refait à l'inverse le raisonnement qu'on a effectué dans la question 3b : pour tout $x \in]-R,R[$, on a :

$$xG(x)^2 + 1 = x\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \Gamma_k\Gamma_{n-k} x^k + 1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \Gamma_k\Gamma_{n-1-k} x^k + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \Gamma_k\Gamma_{n-1-k} x^k.$$

Ainsi, l'équation $xG(x)^2 - G(x) + 1.$ amène, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \Gamma_k\Gamma_{n-1-k} x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma_n x^n.$$

Par unicité, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_k\Gamma_{n-1-k}$.

Comme de plus $\Gamma_0 = 1 = c_0$, $(\Gamma_n)n \in \mathbb{N}$ vérifie la même relation que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec les mêmes conditions initiales. D'après la question 3a, on en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n = c_n$. La boucle est bouclée.