Lycée Carnot — Octobre 2005
ECS 3/4 – Mathématiques

Correction du Devoir Surveillé n° 1 – Combinatoire

EXERCICE – Sommes alternées de coefficients binomiaux

1. **Démonstration par récurrence double**

(a) Si $n < m$, alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k < m$, et donc $\binom{k}{m} = 0$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls, et :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 0.$$

Si $n = m$, alors de même, le seul terme non nul de la somme correspond à l'indice $k = n$, et on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{n} = (-1)^n \binom{n}{n}\binom{n}{n} = (-1)^n.$$

(b) On note, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$\mathcal{P}(m)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ » (N'oubliez pas de quantifier n)

Initialisation : On considère $\mathcal{P}(0)$. Il s'agit donc de calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

On peut s'en sortir de différentes manières, par exemple en remarquant que d'après la formule du binôme, cette expression vaut $(1-1)^n$, c'est à dire 0, si $n > 0$ et 1 si $n = 0$. Une autre solution est de faire une récurrence sur n.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(m)$ est vérifié. Montrons que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

On se rend compte en effectuant les calculs que si l'on fait une récurrence sur n, l'expression sur laquelle on aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence se simplifie dans l'histoire, et qu'on n'a au final par besoin d'appliquer l'hypothèse de la récurrence sur n : on peut donc faire une démonstration directe.

Conclusion : il faut savoir interprêter un tant soit peu l'énoncé. La raison d'être de cette indication était justement de vous faire constater que la récurrence est inutile...

Pour $n = 0$, on a déjà vérifié la formule dans la question précédente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}\binom{k}{m} \\
&\quad \text{d'après la formule de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}\binom{k}{m} \\
&\quad \text{(les terme supprimés dans les sommes sont nuls)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{m} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{m-1} \\
&\quad \text{encore d'après la formule de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m-1} \\
&\quad \text{(changement d'indice)} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\binom{k}{m-1} \\
&\quad \text{(simplification des sommes)}
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(m)$, cette expression vaut $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$ si $n = m$, et 0 sinon.

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

2. **Démonstration par la formule du multinôme**

   (a) Soit x, y et z trois réels, et $n \in \mathbb{N}$. Alors, en appliquant deux fois la formule du binôme,

$$\begin{aligned}(x+y+z)^n &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m (y+z)^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} y^k z^{n-m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} x^m y^{k-m} z^{n-k}.\end{aligned}$$

   Or, pour tout $m \in [\![0, n]\!]$ et tout $k \in [\![m, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} &= \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{m!(k-m)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{m}.\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$(x+y+z)^n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} x^m y^{k-m} z^{n-k}.$$

   On peut aussi d'abord développer $((x+y)+z)^n$; dans ce cas, on se retrouver à devoir inverser l'ordre de sommation dans une somme double sur un triangle (ce que vous devez savoir faire).

   (b) On choisit $y = -1$ et $z = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} x^m (-1)^{k-m} = \sum_{m=0}^{n} x^m (-1)^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}.$$

   Cette égalité entre polynôme étant vraie pour toute valeur $x \in \mathbb{R}$, les coefficients des deux polynômes sont égaux :

   - si $m \neq n$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} x^m = 0$, et on retrouve bien le résultat (les autres termes de la somme, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$ étant nuls) ;
   - si $m = n$: $\displaystyle(-1)^n \sum_{k=n}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} x^m = 1$, ce qui encore une fois donne le résultat attendu.

3. **Démonstration combinatoire**.

   (a) i. L'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus T$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (car $T \neq [\![1, n]\!]$ puisque $m < n$) et majoré (par n par exemple). Ainsi, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, il admet maximum x.

   ii. Puisque $x \notin T$ et $T \subset S$, on a $T \subset S \cup \{x\}$ ou $T \subset S \setminus \{x\}$ suivant le cas. Donc (S', T) vérifie bien $T \subset S' \subset [\![1, n]\!]$. D'autre part, $(S, T) \in \mathcal{F}$, donc $|S|$ est pair. Ainsi, $|S'|$ est impair (rajouter ou retrancher un élément change la parité du cardinal). Donc $(S', T) \in \mathcal{G}$.

   L'application Φ est une bijection. En effet, on peut définir $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ exactement de la même manière (au lieu de partir d'un couple (S, T) tel que $|S|$ est pair, on part d'un couple (S, T) tel que $|S|$ est impair ; alors $|S'|$ est pair). Les applications Φ et Ψ sont clairement réciproques l'une de l'autre. Ainsi, elles sont bijectives.

   (b) On déduit de la question précédente que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$. Calculons ces cardinaux.

   Pour une valeur k de $|S|$ donnée, il faut donc faire le choix d'un premier sous-ensemble S à k élément de $[\![1, n]\!]$ (ce qui nous laisse $\binom{n}{k}$ possibilités), puis d'un sous-ensemble T à m éléments de l'enemble

S à k éléments (ce qui nous laisse $\binom{k}{m}$ possibilités). Ainsi, le nombre de couples (S,T) tels que $|S| = k$, $|T| = m$ et $T \subset S \subset [\![1,n]\!]$ est donc $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Pour obtenir $|\mathcal{F}|$, on doit sommer sur toutes les valeurs paires de k, et pour obtenir $|\mathcal{G}|$ sur toutes les valeurs impaires. Ainsi :

$$|\mathcal{F}| = \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} \qquad \text{et}$$

$$|\mathcal{G}| = \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = -\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

En exprimant l'égalité $|\mathcal{F}| - |\mathcal{G}| = 0$, on obtient à nouveau l'identité voulue.

PROBLÈME – Autour des nombres de Catalan

Partie Préliminaire – Nombres de Catalan

On définit la suite des nombres de Catalan $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

1. Il s'agit de manipuler un peu les binomiaux : pour tout $n \in \mathbb{N}$ (aussi vrai pour $n = 0$),
$$\Gamma_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{2n+1}\cdot\binom{2n+1}{n}.$$
2. Soit $n \geqslant 1$. Alors
$$\Gamma_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)}{n(n+1)}\cdot\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n+1}\Gamma_{n-1}.$$
3. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\Gamma'_n = \Gamma_n$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $\Gamma'_0 = 1 = \Gamma_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Gamma'_{n-1} = \Gamma_{n-1}$. Alors
$$\Gamma'_n = \frac{2\cdot(2n-1)}{n+1}\Gamma'_{n-1} = \frac{2\cdot(2n-1)}{n+1}\Gamma_{n-1} = \Gamma_n,$$
la première égalité résultant de l'hypothèse vérifiée par $(\Gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la seconde de l'hypothèse de récurrence, et la troisième de la question précédente.
La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma'_n = \Gamma_n.$$

Partie I – Arbres binaires

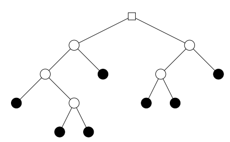
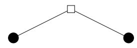


FIG. 1 – Exemple d'arbre binaire

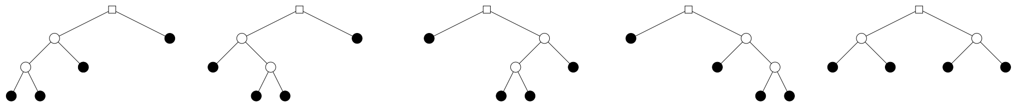
1. (a) Tout arbre a au moins un sommet. Il existe exactement un arbre à un sommet, l'arbre constitué de sa seule racine. Soit un arbre A différent de l'arbre à un sommet. Alors A s'écrit $A = (S, A_1, A_2)$ pour certains arbres A_1 et A_2. Les arbres A_1 et A_2 ont au moins un sommet chacun, donc A a au moins 3 sommets (les deux sommets de A_1 et A_2, et la racine). Il n'existe donc pas d'arbre binaire à 2 sommets.

- Arbres à 3 sommets : (S, A_1, A_2), où A_1 et A_2 sont à 1 sommet : une seule possibilité :



- Arbres à 4 sommets : (S, A_1, A_2), où A_1 à 1 sommet et A_2 à 2 sommets, ou l'inverse. Comme il n'y a pas d'arbres à 2 sommets, ce cas est impossible ; il n'y a pas non plus d'arbre à 4 sommets.
- Arbres à 5 sommets : (S, A_1, A_2), avec A_1 à 1 sommet et A_2 à trois sommets, ou l'inverse (le cas où A_1 et A_2 sont à 2 sommets chacun étant impossible)

- Arbres à 6 sommets : il faut qu'au moins un des deux arbres A_1 ou A_2 ait un nombre pair de sommet (2 ou 4), ce qui est impossible : il n'y a pas d'arbre à 6 sommets.
- Arbres à 7 sommets : A_1 à 1 sommet et A_2 à 5 sommets, ou l'inverse, ou A_1 et A_2 à 3 sommets.



(b) Il apparaît sur les exemples ci-dessus que si N est le nombre de nœuds, et F le nombre de feuilles, $F = N + 1$.

Si cette conjecture est vraie, le nombre total de sommets étant $F + N$, il est de $2N + 1$, et il est donc impair, ce qui coïncide avec les résultats précédents (pas d'arbre dont le nombre de sommets est pair).

2. **Première démonstration de la conjecture de la question 1.**

(a) Appelons distance d'un sommet à la racine le nombre d'arêtes à parcourir pour aller de la racine au sommet. Pour un sommet S, je note $d(S)$ cette distance à la racine. Soit A un arbre binaire. Considérons l'ensemble suivant :

$$E = \{d(N) \mid N \text{ nœud de } A\}$$

Il s'agit donc de l'ensemble des distances à la racine de tous les nœuds de A. Puisque A a au moins trois sommets, donc n'est pas l'arbre composé d'un seule feuille, ce sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est non vide (il contient au moins 0, distance de la racine à elle-même), et fini (le nombre de nœuds étant fini). Ainsi, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, il admet un maximum, atteint pour un certain nœud N. Soit $d = d(N)$.

Ce nœud a deux fils, comme tout nœud, et si un de ses fils est un nœud, ce nœud est à distance $d + 1$ de la racine, ce qui contredit la maximalité de N. Donc, les deux fils de N sont des feuilles.

On peut aussi raisonner par l'absurde, en supposant qu'un tel nœud n'existe pas. Alors on peut construire une suite infinie de sommets 2 à 2 distincts (en descendant de plus en plus dans l'arbre). Cela contredit le fait qu'il existe un nombre fini de sommets.

(b) C'est une évidence. Tout d'abord, si N n'a pas de père (il s'agit alors de la racine), on obtient l'arbre binaire à 1 sommet ; sinon, chaque nœud a exactement deux fils : pour les nœuds autres que le père de N, c'est évident (on n'a pas touché à leurs fils) ; soit N' le père de N. On a remplacé un de ces fils N par une feuille ; l'autre fils est inchangé. Il a donc toujours bien deux fils.

(c) L'arbre obtenu par cette opération a un nœud de moins que l'arbre initial (on a supprimé N). Effectuons donc une récurrence sur le nombre de nœud n.

Initialisation : Soit $n = 0$; Il existe un seul arbre à 0 nœud, constitué uniquement de sa racine (une feuille). Ainsi, $f = n + 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout arbre binaire à n nœuds ait $n + 1$ feuilles. Alors soit A un arbre à $n + 1$ nœuds, et A' l'arbre obtenu pas la construction précédente. A' a donc n nœuds, et une feuille de moins que A. D'après l'hypothèse de récurrence, A' a $n + 1$ feuilles, donc A a $n + 2$ feuilles.

La propriété est héréditaire ; elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

3. **Deuxième démonstration de la conjecture de la question 1.**

Soit (S, A_1, A_2) un arbre (écrit ainsi, il a donc au moins 3 sommets). Les nœuds de A sont S et ceux de A_1 et A_2. Notons $n(A)$ le nombre de nœuds de A. Alors :

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + 1. \tag{1}$$

On raisonne alors pas récurrence forte sur le nombre de nœuds n, l'initialisation étant immédiate pour $n = 0$.

Soit A un arbre à n nœuds, $n \geqslant 3$, $A = (S, A_1, A_2)$. Alors, d'après (1), $0 \leqslant n(A_1) < n$ et $0 \leqslant n(A_2) < n$. Ainsi, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A_1 et A_2 : le nombre de feuilles de A_1 est $f(A_1) = n(A_1) + 1$, et le nombre de feuilles de A_2 est $f(A_2) = n(A_2) + 1$. Les feuilles de A étant composées des feuilles de A_1 et des feuilles de A_2, on en déduit que le nombre de feuilles de A est :

$$f(A) = f(A_1) + f(A_2) = n(A_1) + n(A_2) + 2 = n(A) + 1.$$

Cela montre que la propriété est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II – Dénombrement des arbres binaires

1. Je reprécise l'erreur signalée en début de DS : il faut considérer $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des arbres binaires à n nœuds, avec un *sommet* marqué (feuille ou nœud). La construction de la figure 4 doit être également faite pour un arbre muni d'un sommet quelconque marqué.

   Exprimons une relation entre B_n et F_n : Un élément de F_n est obtenu en choisissant un arbre binaire à n nœuds (B_n possibilités), et en choisissant une feuille parmi les $n+1$ feuilles Ainsi, on obtient la relation :

   $$F_n = (n+1)B_n$$

   Pour justifier cela plus rigoureusement, on peut considérer l'application $f : \mathcal{F}_n \to \mathcal{B}_n$, définie sur un couple (A, F) par $f(A, F) = A$. Alors, pour tout arbre $A \in \mathcal{B}_n$, $f^{-1}(A)$ est l'ensemble :

   $$f^{-1}(A) = \{(A, F) \mid F \text{ feuille de } A\}$$

   Ainsi, $|f^{-1}(A)|$ est égal au nombre de feuilles de A, à savoir $n+1$. Toutes les images réciproques ont même cardinal $n+1$, d'où le résultat, par application du lemme des bergers.

   On peut faire la même chose pour N_n. Cette fois, il s'agit de marquer un sommet quelconque, ce qui donne $2n+1$ possibilités pour chaque arbre. Ainsi :

   $$N_n = (2n+1)B_n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, Φ_n est bien à valeurs dans $\mathcal{F}_{n+1}$: la construction rajoute exactement une feuille et un nœud à l'arbre initial ; on obtient donc un arbre à $n+1$ nœuds, muni de la feuille marquée F.

   Construisons une fonction potentiellement réciproque de Φ_n :

   $$\Psi_n \ : \ \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{N}_n \times \{G, D\}$$

   Soit (A, F) un arbre avec une feuille marquée ; notons N' le père de F et S le deuxième fils de N' (le frère de F). S peut être une feuille ou un nœud. On définit alors $\Psi_n(A, F)$ comme étant $((A', S), b)$, où :
   - $b = G$ si F est le fils gauche de N', $b = D$ si F est le fils droit de N' ;
   - A' est obtenu de A en remplaçant le nœud N' et sa descendance par S et son éventuelle descendance ; autrement dit, on supprime la feuille F et on regroupe N' et S en un seul sommet.

   Ψ_n ainsi défini est clairement réciproque de Φ_n. Ainsi, Φ_n est une bijection.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Φ_n étant une bijection, $\mathcal{N}_n \times \{G, D\}$ et $\mathcal{F}_{n+1}$ sont de même cardinal, donc : $2N_n = F_{n+1}$. On en déduit, à l'aide de la question 1, que :

   $$(n+2)B_{n+1} = F_{n+1} = 2N_n = 2(2n+1)B_n.$$

   Ainsi, la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de la question Prélimiaire-2 ; Ainsi, d'après Prélimiaire-3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \Gamma_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comptons différemment les arbres binaires à $n+1$ nœuds, en faisant un tri sur le nombre de nœuds du sous-arbre gauche. On compte d'abord les arbres $A = (S, A_1, A_2)$ pour lesquels, A_1 a k nœuds, pour une valeur donnée de k, forcément comprise entre 0 et n d'après la relation (1). Un tel arbre A est entièrement donné par la choix de A_1 à k nœuds (Γ_k possibilités de choix), et le choix de A_2, à $n-k$ nœuds (Γ_{n-1} possibilités de choix). Ainsi, le nombre d'arbres à $n+1$ nœuds $A = (S, A_1, A_2)$, tels que A_1 a k nœuds est $\Gamma_k\Gamma_{n-k}$.

   On somme sur toutes les valeurs de k possibles pour obtenir tous les arbres à $n+1$ nœuds (au nombre de Γ_{n+1}). On obtient la relation :
$$\Gamma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k \cdot \Gamma_{n-k}.$$

5. Soit $(\Gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation ci-dessus, et telle que $\Gamma'_0 = 1$. On montre par une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma'_n = \Gamma_n$.

   Initialisation : $\Gamma'_0 = 1 = \Gamma_0$.

   Hérédité :. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Gamma'_k = \Gamma_k$. Alors :
$$\Gamma'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \Gamma'_k \cdot \Gamma'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k \cdot \Gamma_{n-k} = \Gamma_{n+1}.$$

   La seconde inégalité provient de l'hypothèse de récurrence.

   La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\Gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III – Chemins de Dyck

1. Pour aller de $(0, 0)$ à (a, b), on doit effectuer $a+b$ pas : a pas à droite, et b pas montants. Toutes les façons d'effectuer un tel trajet sont donnés par le choix de la position des pas à droite dans la succession de pas, c'est-à-dire par le choix d'un sous-ensemble $E \subset [\![1, a+b]\!]$, E étant l'ensemble des positions des pas à droite, donc de cardinal a. Ainsi, le nombre de chemin est donné par le nombre de choix d'un sous-ensemble de a éléments de $[\![1, a+b]\!]$, à savoir $\binom{a+b}{a}$.

2. Première méthode de dénombrement des chemins de Dyck.

   (a) Soit Γ un chemin de Dyck de longeur $2n$ ne rencontrant la diagonale qu'en $(0, 0)$ et (n, n). Alors, en supprimant le premier pas (à droite) et le dernier (montant), on obtient un chemin Γ' de $(0, 0)$ à $(n-1, n-1)$. Ce chemin est encore un chemin de Dyck. En effet, si $(x_k, y_k)_{k\in[\![0,2n]\!]}$ est la succession des points formant Γ, alors la succession des points de Γ' est : $(x_k - 1, y_k)_{k\in[\![1,2n-1]\!]}$ (le fait de supprimer le premier pas translate l'ensemble de 1 vers la gauche). Or, pour tout $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $x_k > y_k$ (le chemin Γ se trouve strictement sous la diagonale), donc, les valeurs étant entières, $x_k - 1 \geqslant y_k$: le chemin Γ' se trouve sous la diagonale (au sens large cette fois). Ainsi, Γ' est un chemin de Dyck de longueur $2(n-1)$.

   Cette construction définit une application de l'ensemble des chemins de Dyck stricts de longeur 2n vers tous les chemins de Dyck de longueur $2(n-1)$. Une réciproque est donnée par l'opération qui consiste à rajouter à un chemin de Dyck de longueur $2(n-1)$ un pas à droite au début et un pas montant à la fin. L'argument précédent montre qu'on obtient ainsi un chemin de Dyck strict de longueur $2n$.

   Ainsi, on a construit une bijection entre le nombre de chemins de Dyck stricts de longueur $2n$ et le nombre de chemins de Dyck de longueur $2(n-1)$. On en déduit que le nombre de chemins de Dyck stricts de longeur $2n$ est D_{n-1}.

   On illustre cette construction sur la figure 2. Dans cette figure, le premier chemin est un chemin de Dyck restant strictement au dessus de la diagonale, et le deuxième est le chemin de Dyck correspondant, obtenu en lui enlevant les pas extrémaux.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, pour tout chemin de Dyck Γ de longueur $2(n+1)$, il existe une plus petite valeur $k > 0$ telle que le chemin ait une intersection avec la diagonale en (k, k) : au besoin, on peut prendre $k = n+1$ s'il n'existe pas de valeur plus petite.

FIG. 2 – Passer d'un chemin de Dyck à un chemin de Dyck strict

Trions donc les chemins de Dyck de longueur $n+1$ suivant leur premier point d'intersection non nul (k,k) avec la diagonale. Pour une valeur de k donnée, un tel chemin est constitué d'un chemin de Dyck strict de $(0,0)$ à (k,k), donc de longueur $2k$, au nombre de D_{k-1} d'après la question précédente, et d'un chemin de Dyck quelconque de (k,k) à $(n+1,n+1)$ (donc de longueur $n+1-k$), au nombre de D_{n+1-k}. Ainsi, le nombre de chemins de Dyck de longueur $2(n+1)$ dont la première intersection non nulle avec la diagonale est (k,k) est $D_{k-1}D_{n+1-k}$. Par conséquent, en sommant sur toutes les valeurs de k possibles ($k \in [\![1, n+1]\!]$), on obtient :

$$D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} D_{k-1}D_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k} \qquad \text{(changement d'indice)}$$

(c) Comme $D_0 = 1$, la question 5 de la partie II amène : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \Gamma_n$.

3. Deuxième méthode de dénombrement des chemins de Dyck.

(a) On obtient les conjugués de $(0,1,1,0,0,1,1)$ en prenant les premutations circulaires de cette suite : $(0,1,1,0,0,1,1)$, $(1,1,0,0,1,1,0)$, $(1,0,0,1,1,0,1)$, $(0,0,1,1,0,1,1)$, $(0,1,1,0,1,1,0)$, $(1,1,0,1,1,0,0)$, $(1,0,1,1,0,0,1)$.
À ne pas oublier le chemin initial $(0,1,1,0,0,1,1)$ qui est bien conjugué de lui-même (pour $p=7$) !
Ainsi, le chemin $(0,1,1,0,0,1,1)$ a exactement 7 conjugués.
Si on fait de même pour $(0,1,1,0,1,1)$, on trouve les conjugués suivants :
$(0,1,1,0,1,1)$, $(1,1,0,1,1,0)$, $(1,0,1,1,0,1)$, $(0,1,1,0,1,1)$, $(1,1,0,1,1,0)$, $(1,0,1,1,0,1)$.
Les trois derniers chemins sont les mêmes que les premiers. Ainsi, le chemin $(0,1,1,0,1,1)$ n'a que 3 conjugués.

(b) Soit Γ un chemin de longueur ℓ. Γ a au plus ℓ conjugués, donnés par le choix de $p \in [\![1,\ell]\!]$.
Si Γ admet une période stricte, soit m la longueur d'une période, $m < \ell$. Alors les deux chemins conjugués à Γ correspondant aux choix $p = 0$ et $p = m$ sont égaux :

$$(a_1, \dots, a_\ell) = (a_{m+1}, \dots, a_\ell, a_1, \dots, a_m)$$

puisque pour tout $i \in [\![1, \ell - m]\!]$, $a_i = a_{i+m}$. Ainsi, les ℓ conjugués de Γ obtenu pour les différents choix possibles de p ne sont pas deux à deux distincts, et Γ a donc au plus $\ell - 1$ conjugués (il en a même au plus m).
Réciproquement, si Γ n'admet pas de période stricte, les différents chemins ontenus pour les différents choix de p sont clairement 2 à 2 distincts. Ainsi, Γ admet ℓ conjugués.
(La démonstration rigoureuse de ce point suffisamment intuitif nécessiterait l'utilisation du théorème de Bezout ; le résultat exact s'énonce : si p et p' donnent le même conjugué, alors le pgcd de ℓ et $p' - p$ est une période de Γ)

(c) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Γ un chemin de Dyck de longueur $2n$. On lui associe un chemin $\overline{\Gamma}$ en lui rajoutant un pas montant. Par exemple, si $\Gamma = (0,1,0,1)$, alors $\overline{\Gamma} = (0,1,0,1,1)$.*
Pour l'exemple donné, $\overline{\Gamma} = (0,1,0,1,1)$ n'admet pas de période stricte, et a donc 5 conjugués.
Pour le cas général, commençons par la remarque suivante : soit Γ un chemin admettant une période stricte : Γ est donc obtenu en répétant une succession de pas (définissant un chemin Γ') un certain nombre de fois, disons k fois, $k > 1$. Alors, si Γ' est un chemin reliant $(0,0)$ à (a,b), alors Γ est un chemin reliant $(0,0)$ à (ka,kb). En particulier, k divise chacune des coordonnées du point d'aboutissement du chemin Γ.

Appliquons cette remarque à la situation qui nous intéresse : $\overline{\Gamma}$ est un chemin allant de $(0,0)$ à $(n, n+1)$. Ainsi, s'il admet une période stricte, répétée k fois, $k > 1$, k divise n et $n+1$, donc leur différence 1 ; cela contredit l'hypothèse $k > 1$.

Donc $\overline{\Gamma}$ n'admet pas de période stricte, et admet donc un nombre de conjugués égal à sa longueur, c'est-à-dire $2n+1$.

(d) Question délicate... Probablement la plus délicate du problème. Suivons l'indication.

Soit $(x_k, y_k)_{k\in[\![0,2n+1]\!]}$ la suite des points de Γ'. Soit p le plus petit entier k tel que $y_k - x_k$ soit maximal. Soit Γ'' le conjugué de Γ' obtenu grâce à cette valeur de p. Notons $\Gamma'' = (x'_k, y'_k)_{k\in[\![0,2n+1]\!]}$. Alors :

- Pour tout $k \in [\![0, 2n+1-p]\!]$, (x'_k, y'_k) est atteint en faisant depuis $(0,0)$ les mêmes pas que de (x_p, y_p) à (x_{k+p}, y_{k+p}) dans le chemin Γ'. Ainsi $x'_k = x_{k+p} - x_p$ et $y'_k = y_{k+p} - y_p$. On en déduit que :
$$y'_k - x'_k = (y_{k+p} - x_{k+p}) - (y_p - x_p) \leqslant 0,$$
par maximalité de $(y_p - x_p)$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, 2n+1-p]\!]$, le point (x'_k, y'_k) de Γ'' est situé sous la diagonale.
- Pour tout $k \in [\![2n+1-p, 2n]\!]$, (x'_k, y'_k) est atteint en faisant depuis $(0,0)$ les mêmes pas que de (x_p, y_p) à (x_{2n+1}, y_{2n+1}), puis de (x_0, y_0) à $(x_{k+p-2n+1}, y_{k+p-2n+1})$ dans le chemin Γ'. Ainsi :
$$\begin{aligned} x'_k &= x_{2n+1} - x_p + x_{k+p-(2n+1)} = n - x_p + x_{k+p-(2n+1)} \qquad \text{et} \\ y'_k &= y_{2n+1} - y_p + y_{k+p-(2n+1)} = n + 1 - y_p + y_{k+p-(2n+1)}. \end{aligned}$$
On en déduit que :
$$y'_k - x'_k = 1 + (y_{k+p-(2n+1)} - x_{k+p-(2n+1)}) - (y_p - x_p).$$
Or, pour ces valeurs de k, $k+p-(2n+1) < p$, donc, par minimalité du choix de p parmi les indices i maximisant $y_i - x_i$, on a $y_{k+p-(2n+1)} - x_{k+p-(2n+1)} < y_p - x_p$, et comme toutes les valeurs sont entières, il en résulte que pour tout $k \in [\![2n+1-p, 2n]\!]$, $y'_k - x'_k \leqslant 0$.

Ainsi, pendant les $2n$ premiers pas, le chemin Γ'' reste sous la diagonale. Le chemin arrivant en $(n, n+1)$ après $2n+1$ pas, il en résulte notamment que le dernier pas est un pas montant, et que $(x'_{2n}, y'_{2n}) = (n, n)$. Soit Γ le chemin obtenu de Γ'' en l'amputant de son dernier pas. Alors Γ est un chemin de Dyck, et $\overline{\Gamma} = \Gamma''$, donc $\overline{\Gamma}$ est dans la classe de conjugaison de Γ'.

On a donc montré l'existence d'un tel chemin de Dyck. Il reste à montrer l'unicité. Pour cela, on considère un entier $p' \in [\![0, 2n+1]\!]$ tel que $p' \neq p$, et le chemin C' conjugué à Γ' par cette valeur p'. Soit $(x''_k, y''_k)_{k\in[\![0,2n+1]\!]}$ la suite des points de C. S'il existe un chemin de Dyck C tel que $\overline{C} = C'$, alors, pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, (x_k, y_k) est sous la diagonale, c'est-à-dire $y_k - x_k \leqslant 0$. Montrons que cela n'est pas vrai.

Puisque $p' \neq p$, et par définition de p :

- soit $p' < p$ et $y_{p'} - x_{p'} < y_p - x_p$. Alors $(x''_{p-p'}, y''_{p-p'})$ est atteint depuis $(0,0)$ en effectant les mêmes pas que dans le chemin Γ' pour aller de $(x_{p'}, y_{p'})$ à (x_p, y_p). Ainsi :
$$y''_{p-p'} - x''_{p-p'} = (y_p - y_{p'}) - (x_p - x_{p'}) = (y_p - x_p) - (y_{p'} - x_{p'}) > 0.$$
- soit $p' > p$ et $y_{p'} - x_{p'} \leqslant y_p - x_p$. Dans ce cas, les pas effectués dans C pour atteindre $(x_{p'-p}, y_{p'-p})$ sont les pas dans Γ de $(x_{p'}, y_{p'})$ à $(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (n, n+1)$, puis de $(0,0)$ à (x_p, y_p). Ainsi :
$$y''_{p'-p} - x''_{p'-p} = n + 1 - y_{p'} + y_p - n + x_{p'} - x_p = 1 + (y_p - x_p) - (y_{p'} - x_{p'}) \geqslant 1 > 0.$$

Dans les deux cas, on a trouvé un point strictement au dessus de la diagonale.

Nous illustrons nos propos par la figure 3.

Dans cette figure, on a entouré les deux points (x_k, y_k) du chemin pour lesquels $y_k - x_k$ est maximal. Le point correspondant à une valeur de k minimale est le point entouré d'un carré. La seconde figure représente le conjugué obtenu en débutant le chemin au point entouré d'un rond : ce n'est pas un chemin de Dyck auquel on a ajouté un pas montant. La troisième figure représente le conjugué obtenu en commençant au point entouré d'un carré. Cette fois, les $2n$ premiers pas constituent bien d'un chemin de Dyck.

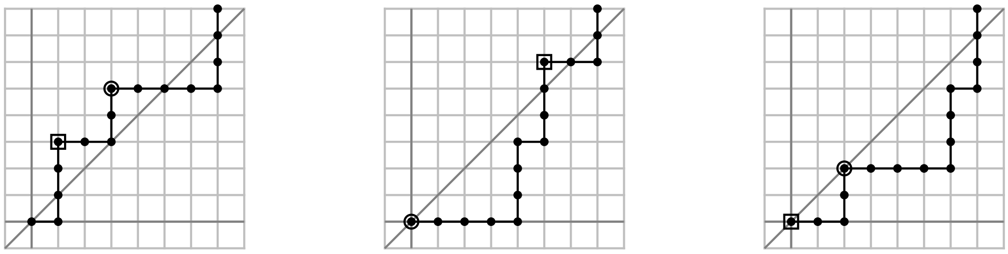


FIG. 3 – Comment obtenir le chemin de Dyck conjugué à un chemin quelconque

(e) Soit E_n l'ensemble des chemins de $(0,0)$ à $(n, n+1)$. On définit une application $\Phi : E_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ en associant à tout chemin Γ' l'unique chemin de Dyck Γ tel que $\overline{\Gamma}$ soit conjugué à Γ.

Soit Γ un chemin de Dyck. Alors, si $\Phi(\Gamma') = \Gamma$, Γ' est conjugué à $\overline{\Gamma}$. Réciproquement, si Γ' est conjugué à $\overline{\Gamma}$, alors Γ est un chemin tel que $\overline{\Gamma}$ est conjugué à Γ', et c'est le seul ; par définition de Φ, on a alors $\Phi(\Gamma') = \Gamma$. Ainsi, $\Phi^{-1}(\Gamma)$ est exactement l'ensemble des chemins conjugués à $\overline{\Gamma}$. D'après la question 3c, $\Phi^{-1}(\Gamma)$ est de cardinal $2n+1$, indépendamment de Γ. D'après le lemme du berger, on obtient alors :

$$(2n+1) \cdot |\mathcal{D}_n| = |E_n| = \binom{2n+1}{n},$$

la dernière égalité résultant de la question 1. Ainsi :

$$D_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \Gamma_n \qquad \text{(d'après Préliminaire-1).}$$

Partie IV – Une bijection entre chemins de Dyck et arbres binaires

1. Notons A_0 l'unique arbre à 1 sommet, A_1 l'unique arbre à trois sommets, A_2 et A_3 les deux arbres à 5 sommets, dans l'ordre donné dans la question I-1a, et A_4, A_5, A_6, A_7 et A_8 les cinq arbres à 7 sommets, dans l'ordre donné dans la question I-1a. On désigne par A_9 l'arbre de la figure 1. Je me dispense d'indiquer l'indice pour Φ. Alors :
   - $\Phi(A_0) = ()$ (suite vide) ;
   - $\Phi(A_1) = \Phi(S, A_0, A_0) = (0, \Phi(A_0), 1, \Phi(A_0)) = (0, 1)$;
   - $\Phi(A_2) = \Phi(S, A_1, A_0) = (0, \Phi(A_1), 1, \Phi(A_0)) = (0, 0, 1, 1)$;
   - $\Phi(A_3) = \Phi(S, A_0, A_1) = (0, \Phi(A_0), 1, \Phi(A_1)) = (0, 1, 0, 1)$;
   - $\Phi(A_4) = \Phi(S, A_2, A_0) = (0, \Phi(A_2), 1, \Phi(A_0)) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$;
   - $\Phi(A_5) = \Phi(S, A_3, A_0) = (0, \Phi(A_3), 1, \Phi(A_0)) = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$;
   - $\Phi(A_6) = \Phi(S, A_0, A_2) = (0, \Phi(A_0), 1, \Phi(A_2)) = (0, 1, 0, 0, 1, 1)$;
   - $\Phi(A_7) = \Phi(S, A_0, A_3) = (0, \Phi(A_0), 1, \Phi(A_3)) = (0, 1, 0, 1, 0, 1)$;
   - $\Phi(A_8) = \Phi(S, A_1, A_1) = (0, \Phi(A_1), 1, \Phi(A_1)) = (0, 0, 1, 1, 0, 1)$;
   - $\Phi(A_9) = \Phi(S, A_5, A_2) = (0, \Phi(A_5), 1, \Phi(A_2)) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$.

   Remarquez que cette construction a une très belle interprétation géométrique : on parcourt le bord de l'arbre en partant de la racine et en laissant l'arbre sur sa gauche (puisqu'on commence par descendre, on part donc du côté gauche de l'arbre). On suit fidèlement le bord de l'arbre, en contournant soigneusement les feuilles, jusqu'à revenir à la racine (de l'autre côté). On obtient alors $\Phi(A)$ de la manière suivante : à chaque fois que l'on descend vers un fils gauche, on ajoute un 0 à la liste, à chaque fois qu'on descend vers un fils droit, on ajoute un 1. Dans la figure 4, on illustre ceci sur l'arbre de la figure 1.

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout arbre binaire $A \in \mathcal{B}_n$, $\Phi_n(A) \in \mathcal{D}_n$. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $A = A_0$ et son image est le chemin nul, chemin de Dyck de longueur 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que pour tout $k < n$ et tout $A \in \mathcal{B}_k$, $\Phi_k(A) \in \mathcal{D}_k$. Alors, soit $A \in \mathcal{B}_n$, $A = (S, A_1, A_2)$.

   A_1 et A_2 ont strictement moins de nœuds que A, la somme du nombre de leurs nœuds faisant $n-1$. Soit k et $n-1-k$ le nombre de leurs nœuds. Alors $\Phi_k(A_1)$ est par hypothèse de récurrence un chemin de Dyck

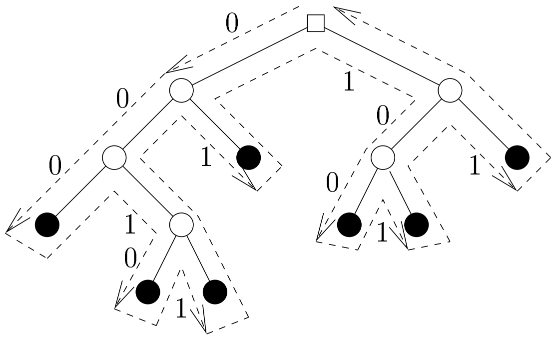


FIG. 4 – Interprétation géométrique de Φ

de longueur $2k$ et $\Phi_{n-1-k}(A_2)$ un chemin de Dyck de longueur $2(n-1)-2k$. Le chemin $\Phi(A)$ obtenu en concaténant ces deux chemins et en intercalant deux pas supplémentaires est donc de longueur $2n$.

De plus, soit $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,2n]\!]}$ la suite des points de $\Phi_n(A)$, $(x'_i, y'_i)_{i\in[\![0,2k]\!]}$ la suite des points de $\Phi_k(A_1)$ et $(x''_i, y''_i)_{i\in[\![0,2(n-1-k)]\!]}$ la suite des points de $\Phi_{n-1-k}(A_2)$. Alors,

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0,0) \\ \forall i \in [\![1, 2k+1]\!],\ (x_i, y_i) = (x'_{i-1}+1, y'_{i-1}) \\ \forall i \in [\![2k+2, 2n]\!],\ (x_i, y_i) = (x''_{i-(2k+2)}+k+1, y''_{i-(2k+2)}+k+1). \end{cases}$$

En particulier, puisque $\Phi_k(A_1)$ et $\Phi_{n-1-k}(A_2)$ sont des chemins de Dyck, pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, $y_i - x_i \leqslant 0$, ce qui montre que $\Phi_n(A)$ est aussi un chemin de Dyck.

Ainsi $\Phi(A)$ est un chemin de Dyck de longueur $2n$: la propriété est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Faisons une remarque : en reprenant les notations de la question précédente, à partir du chemin de Dyck $\Phi(A)$, il est facile de retrouver $\Phi(A_1)$ et $\Phi(A_2)$, et, si on raisonne par récurrence, A_1 et A_2, puis A. En effet, le chemin obtenu en tronquant $\Phi(A)$ après $2(k+1)$ pas est un chemin de Dyck strict : en effet,

$$\forall i \in [\![1, 2k+1]\!],\ y_i - x_i = y'_{i-1} - x'_{i-1} - 1 \leqslant -1 < 0.$$

Ainsi, $2(k+1)$ correspond au nombre de pas à faire pour rencontrer pour la première fois la diagonale. Étant donné $\Phi(A)$, on peut donc retrouver $\Phi(A_1)$ en considérant le chemin de Dyck strict obtenu en tronquant $\Phi(A_1)$ au premier point atteignant la diagonale, et en supprimant de ce chemin ses deux pas extrémaux ; $\Phi(A_2)$ est alors la fin du chemin.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que Φ_n est une bijection.

Initialisation : Φ_0 est l'unique application d'un ensemble à un élément dans un ensemble à un élément : c'est une bijection.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que pour tout $k < n$, Φ_k est bijective. On note $\Psi_k : \mathcal{D}_k \to \mathcal{B}_k$ sa fonction réciproque. On va construire une fonction candidate à être la réciproque de Φ_n.

Soit $\Gamma = (x_i, y_i)_{i\in[\![0,2n]\!]}$ un chemin de Dyck de longueur $2n$, et soit k le plus petit entier strictement positif tel que $x_k = y_k$. Alors :

- le chemin constitué des $2k$ premiers pas est un chemin de Dyck strict ; ôtons-lui ses pas extrémaux, on obtient encore un chemin de Dyck, de longueur $2(k-1)$. Soit Γ_1 ce chemin ;
- le chemin constitué des $2n-2k$ derniers pas est aussi un chemin de Dyck, de longueur $2(n-k)$. Soit Γ_2 ce chemin.

On a donc $\Gamma_1 \in \mathcal{D}_{k-1}$ et $\Gamma_2 \in \mathcal{D}_{n-k}$, où $0 \leqslant k-1 < n$ et $0 \leqslant n-k < n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ces chemins. Soit A_1 l'arbre $\Psi_{k-1}(\Gamma_1)$, et A_2 l'arbre $\Psi_{n-k}(\Gamma_2)$. Alors on définit $\Psi_n(\Gamma)$ comme étant l'arbre (S, A_1, A_2).

Une vérification immédiate montre que Φ_n et Ψ_n sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, Φ_n est bijective.

La propriété étant héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ_n est une bijection.

Remarquez que la construction consistant à couper un chemin de Dyck en un chemin de Dyck strict suivi d'un chemin de Dyck a déjà été utilisé dans la question III-2.