Concours blanc n° 1 (DS 4)
Correction du problème 1 – Étude de séries

Quantificateurs

Avant d'entamer la correction, un petit rappel sur l'usage des quantificateurs. **Toute variable qu'on utilise doit avoir été définie, sauf si elle est muette.** Définir une variable consiste à la poser une fois pour toute (« Soit $n...$ »), ou à la quantifier (« $\exists n...$ » ou « $\forall n...$ »). Gardez en tête qu'un **quantificateur ne porte que sur l'expression qui suit**; si vous avez une succession d'expressions, il faut théoriquement répéter le quantificateur.

Remarquez que logiquement, on définit toujours les choses avant de les employer, ainsi, **les quantificateurs sont toujours placés avant l'expression qu'ils concernent.**

Enfin, les quantificateurs étant des objets du langage mathématique, au sein d'une expression mathématique donnée, **ne les utilisez pas dans le texte.** Vous disposez de locutions françaises à cet usage, à écrire en toutes lettres.

Un petit rappel des symboles mathématiques les plus courants introduisant des **variables muette** (qu'il ne faut donc pas quantifier SVP) :

- **Définition de suites et fonctions** : le symbole $(-)_{n \in \mathbb{N}}$ définissant l'objet « suite » dans lequel l'indice est muet ; le symbole $\mapsto$ définissant une fonction (utilisation : $x \mapsto f(x)$)...
- Sommes discrètes ou continues : **sommes** $\sum$ et **intégrales** $\int$;
- **Les symboles de limite** : $\lim$, $\equiv$, o , O etc. Ainsi, n'écrivez pas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + o(n)$, mais bien tout simplement $u_n = n + o(n)$. Il est sous-entendu par le petit o que cette égalité est vraie au voisinage de $+\infty$. D'ailleurs, on rencontre dans certains livres les notations $\underset{n \rightarrow +\infty}{o}$ et $\underset{n \rightarrow +\infty}{O}$ pour introduire de manière plus claire la variable muette n .
- Remarquez que dans la locution « série de terme général u_n », n est implicitement considéré comme une variable muette, ainsi, le terme général est bien le terme u_n et non la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (mais là, on commence à couper les cheveux en quatre).

1. La règle de d'Alembert

- (a) i. En prenant $\varepsilon = \ell' - \ell > 0$ dans la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \ell + \varepsilon = \ell'$. Ainsi, pour une telle valeur de N : $\forall n \geq N, |v_{n+1}| \leq \ell' |v_n|$.

Remarques :

- Ne travaillez pas abstraitement sur une variable donnée à l'aide d'un quantificateur d'existence; ce quantificateur n'impliquant en rien l'unicité de la variable, cette variable n'est pas bien définie. Pour pouvoir travailler concrètement avec elle, il faut la poser, en faisant un choix d'une valeur qui convient (et le quantificateur d'existence nous assure qu'on peut faire un tel choix).
 - Une erreur grave trop souvent rencontrée : Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ n'implique en rien qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq \ell$, ou pire, $u_n = \ell$. À quoi sert, à votre avis, cette marge d'erreur ε qui apparaît dans la définition ?
- ii. Soit une valeur de N telle que dans la question précédente. Soit $(w_n)_{n \geq N}$ la suite géométrique de raison ℓ' initialisée par $w_N = |v_N|$. Alors, montrons par récurrence que pour tout $n \geq N$, $|v_n| \leq w_n$:
- $|v_N| \leq w_N$ (initialisation) ;
 - Soit $n \geq N$ tel que $|v_n| \leq w_n$. Alors, d'après la question précédente et la définition de $(w_n)_{n \geq N}$:

$$|v_{n+1}| \leq \ell' |v_n| \leq \ell' w_n = w_{n+1},$$

la seconde inégalité découlant de l'hypothèse de récurrence et la positivité de ℓ' (limite d'une suite positive).

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq N$, $|v_n| \leq w_n$. Or, $\sum w_n$ converge (série géométrique de raison $\ell' \in [0, 1[$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, applicable ici car les séries sont à termes positifs, $\sum |v_n|$ converge, c'est-à-dire $\sum v_n$ converge absolument.

Remarque : on vous demande la *convergence absolue*, et non la *convergence*. Il est donc erroné de faire intervenir ici le théorème de la convergence absolue, qui permet de déduire de la convergence de $\sum |v_n|$ celle de $\sum v_n$. Mais la convergence *absolue* de $\sum v_n$ se déduit de la convergence de $\sum |v_n|$ uniquement par la *définition* de la convergence absolue!

- (b) Soit $\varepsilon = \ell - 1 > 0$. Alors, en utilisant la définition de la limite d'une suite pour cette valeur de ε , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|v_{n+1}| \geq |v_n|$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|v_n| \geq |v_N|$. Or, $|v_N| > 0$, car la suite $\left(\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Ainsi, $(|v_n|)_{n \geq N}$ étant minorée par un réel strictement positif, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Donc $\sum v_n$ diverge grossièrement.

Remarques :

- En considérant $\ell' \in]1, \ell[$, on pourrait même montrer que $(|v_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
 - L'emploi du théorème de comparaison des séries à termes positifs pour conclure ne permet de donner que la divergence de $\sum |v_n|$, ce qui ne suffit à établir ni la divergence de $\sum v_n$ (pensez aux séries semi-convergentes!) ni *a fortiori* sa divergence *grossière*.
 - À ce propos j'ai eu l'impression d'une confusion sur la signification de *divergence grossière*. La divergence grossière de $\sum v_n$ n'est pas synonyme de divergence de $\sum |v_n|$, comme j'ai cru le voir sur trop de copies, mais signifie que le terme général ne tend pas vers 0, ce qui est beaucoup plus fort!
- (c) Les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ vérifient toutes deux $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, pourtant la première diverge et la seconde converge (séries de Riemann).

2. Étude du cas de presque toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$

- (a) La suite $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{pn}{qn} \neq 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\binom{pn}{qn}}{\binom{p(n-1)}{q(n-1)}} = \frac{(pn)!(q(n-1))!((p-q)(n-1))!}{(p(n-1))!(qn)!((p-q)n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (pn-k)}{\prod_{k=0}^{q-1} (qn-k) \prod_{k=0}^{p-q-1} ((p-q)n-k)}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{u_n}{u_{n-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\prod_{k=0}^{p-1} pn}{\prod_{k=0}^{q-1} qn \prod_{k=0}^{p-q-1} (p-q)n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(pn)^p}{(qn)^q ((p-q)n)^{p-q}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{p^p}{q^q (p-q)^{p-q}}.$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{p^p}{q^q (p-q)^{p-q}}.$$

(L'équivalent trouvé prouve également l'*existence* de cette limite.)

Remarquez que cette expression est également bien définie si $q = 0$ ou si $q = p$, puisque par convention $0^0 = 1$.

Remarque : Soyez un peu soigneux dans les simplifications de factorielles! Ne confondez pas $pn - 1$ et $p(n - 1)$. Il reste bien sûr p termes dans la simplification de $\frac{(pn)!}{(p(n-1))!}$ et non un seul!

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|u_n x^n|}{|u_{n-1} x^{n-1}|} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot |x|$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n x^n|}{|u_{n-1} x^{n-1}|} = \ell \cdot |x|$. D'après la question 1 (règle de d'Alembert) :

- $\sum u_n x^n$ converge absolument si $\ell \cdot |x| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\ell}$;
- $\sum u_n x^n$ diverge grossièrement si $\ell \cdot |x| > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\ell}$.

Remarque : Ne refaites pas la démonstration de la règle de d'Alembert. Ce n'est pas pour les chiens qu'on a fait démontrer cette règle dans toute sa généralité dans la partie I.

3. Étude du cas où $x = \frac{1}{\ell}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = \frac{u_n}{\ell^n}$.

- (a) **En utilisant la première indication :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$.

Soit, en intégrant cette expression entre k et $k+1$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{k+1}$.

En sommant ces inégalités pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$

(on a utilisé la relation de Chasles). Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, elle est vraie aussi pour $n-1$, et finalement, on obtient :

$$\forall n \geq 2, \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

Par conséquent : $\forall n \geq 2, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$.

En divisant par $\ln n > 0$: $\forall n \geq 2, \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln n} = 1$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la limite du terme encadré existe, et vaut 1 ; ce qui signifie très précisément :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

En utilisant la seconde indication : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ et $b_n = a_{n+1} - a_n$.

La convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équivalente à la convergence de la série $\sum b_n$. Or :

$$\forall n \geq 2, b_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

En utilisant le développement du logarithme donné en début d'énoncé, puisque $(-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0,

$$b_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$), on en déduit, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs, que $\sum b_n$ converge absolument, donc converge. Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite γ , i.e. :

$$a_n = \gamma + o(1), \quad \text{soit:} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, ce terme est prépondérant dans cette expression, donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Remarques :

- Le résultat de cette question est **archi-classique**. Il faut le connaître, et savoir le redémontrer, d'une façon ou d'une autre, sans indication.
- **Ne composez pas un équivalent par une fonction.** Ainsi, il n'est pas correct de dire que $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ car $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$. Prenez l'exemple de e^n et e^{n+1} ...
- Faites attention aux indices dans cette démonstration, ou vous risquez de dire n'importe quoi. Notamment, $\int_0^n \frac{dx}{x}$ n'est pas défini ! (on dit que l'intégrale divergente en 0). Évitez aussi de parler de $\ln 0$, ça ne fait pas bon effet !

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \ln(u'_n) - \ln(u'_{n-1}) &= \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) - \ln \ell \\ &= \ln \prod_{k=0}^{p-1} (pn - k) - \ln \prod_{k=0}^{q-1} (qn - k) - \ln \prod_{k=0}^{p-q-1} ((p-q)n - k) - \ln \ell \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \ln(pn - k) - \sum_{k=0}^{q-1} \ln(qn - k) - \sum_{k=0}^{p-q-1} \ln((p-q)n - k) - p \ln p + q \ln q + (p-q) \ln(p-q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(u'_n) - \ln(u'_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{p-1} \left(\ln \left(1 - \frac{k}{pn} \right) + \ln n + \ln p \right) - \sum_{k=0}^{q-1} \left(\ln \left(1 - \frac{k}{qn} \right) + \ln n + \ln q \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{p-q-1} \left(\ln \left(1 - \frac{k}{(p-q)n} \right) + \ln n + \ln(p-q) \right) - p \ln p + q \ln q + (p-q) \ln(p-q) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(1 - \frac{k}{pn} \right) - \sum_{k=0}^{q-1} \ln \left(1 - \frac{k}{qn} \right) - \sum_{k=0}^{p-q-1} \ln \left(1 - \frac{k}{(p-q)n} \right) + (p-q - (p-q)) \ln n \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \ln \left(1 - \frac{k}{pn} \right) - \sum_{k=1}^{q-1} \ln \left(1 - \frac{k}{qn} \right) - \sum_{k=1}^{p-q-1} \ln \left(1 - \frac{k}{(p-q)n} \right)
\end{aligned}$$

Remarques :

- Vous êtes très (trop) nombreux à avoir essayé d'obtenir cette expression « abstraitement », c'est-à-dire en n'utilisant nulle part l'expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comment pouvez-vous espérer obtenir des résultats spécifiques à l'aide uniquement de considérations générales?
 - **Vous n'avez pas le réflexe $\ln \prod = \sum \ln$.** Si on passe au logarithme, c'est souvent bien pour cela! Ici, on dispose de coefficients binomiaux et de puissances, donc de produits et quotients.
- (c) On utilise le développement du logarithme donné en début de problème, les suites concernées tendant vers 0 :

$$\begin{aligned}
\ln(u'_n) - \ln(u'_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{p-1} \left(-\frac{k}{pn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \sum_{k=1}^{q-1} \left(-\frac{k}{qn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \sum_{k=1}^{p-q-1} \left(-\frac{k}{(p-q)n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
&= -\frac{1}{pn} \sum_{k=1}^{p-1} k + \frac{1}{qn} \sum_{k=1}^{q-1} k + \frac{1}{(p-q)n} \sum_{k=1}^{p-q-1} k + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{pn} \cdot \frac{p(p-1)}{2} + \frac{1}{qn} \cdot \frac{q(q-1)}{2} + \frac{1}{(p-q)n} \cdot \frac{(p-q-1)(p-q)}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2n} \cdot (-(p-1) + (q-1) + (p-q-1)) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : Attention à bien justifier la sommation des O . Tout d'abord, ramenez-vous à une somme de O de la même chose, ensuite, justifiez qu'on somme ces O en nombre fini et borné.

- (d) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \ln u'_n - \ln u'_{n-1} + \frac{1}{2n}$.

$$\text{Alors, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \ln u'_n = \ln u'_n - \ln u'_0 = \sum_{k=1}^n \ln u'_k - \ln u'_{k-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n c_k.$$

D'après la question (3a), $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$, et comme $c_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum c_n$ converge,

donc en particulier, sa somme partielle est négligeable devant $\ln n$. Ainsi, $\ln u'_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \ln n$.

Remarque : Ici, on somme une infinité de $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Attention à l'erreur consistant à dire qu'on obtient un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Tout d'abord, seuls les grands termes sont en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ensuite, la somme n'est pas finie. Il est donc nécessaire ici d'utiliser un argument de convergence.

- (e) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(nu'_n) = \ln n + \ln u'_n$, donc : $\ln(nu'_n) = \ln n - \frac{\ln n}{2} + o(\ln n) = \frac{\ln n}{2} + o(\ln n)$.

Ainsi, $\ln(nu'_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(nu'_n) = +\infty$.

On en déduit que $\lim nu'_n = +\infty$. Ainsi, $\frac{1}{n} = o(u'_n)$. Donc, d'après un corollaire du tcstp, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum u'_n$.

Remarque : Ne summez pas des équivalents. Vous pouvez éventuellement le faire si les termes sommés *ainsi que la somme* sont de même ordre, mais ceux parmi vous qui ont tenté une telle justification ont oublié la plupart des hypothèses (il ne suffit pas que la somme soit non nulle). De toute manière, un tel résultat étant hors-programme, et une telle tentative erronée de justification pouvant amener le correcteur à croire que vous summez purement et simplement des équivalents sans être conscients du danger, **mieux vaut faire la somme en utilisant l'expression des équivalents à l'aide des o** , tel que ci-dessus.

4. Étude du cas où $x = -\frac{1}{\ell}$.

(a) D'après (3d), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u'_n = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n = 0$.

De plus, d'après (3c), $\ln u'_n - \ln u'_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, donc ces deux suites sont de même signe à partir d'un certain rang N (pour vous en convaincre prenez $\varepsilon = 1$ dans la définition la limite du quotient).

Ainsi, N étant un tel rang : $\forall n \geq N$, $\ln u'_n - \ln u'_{n-1} \leq 0$, soit : $\ln(u'_n) \leq \ln u'_{n-1}$.

Comme la fonction $\ln$ est croissante, on en déduit que : $\forall n \geq N$, $u'_n \leq u'_{n-1}$.

(b) Montrons que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Soit N tel que (u'_n) soit décroissante à partir du rang N .

- $\forall n \geq \frac{N}{2}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = u'_{2n+2} - u'_{2n+1} \leq 0$ car $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N ; donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

- De même, $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = -u'_{2n+1}$, de limite nulle d'après la question précédente.

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite S . Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, |S_{2n} - S| < \varepsilon, \quad \text{et} \quad \exists N_2, \forall n \geq N_2, |S_{2n+1} - S| < \varepsilon.$$

Alors : $\forall n \geq 2 \max(N_1, N_2)$, $|S_n - S| < \varepsilon$. On en déduit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite S . Ainsi,

$\sum (-1)^n u'_n$ converge (c'est une semi-convergence d'après la question 3).

5. Programmation. On suppose que $p = 2$ et $q = 1$.

(a) Ici, $\ell = \frac{p^p}{q^q(p-q)^{p-q}} = 2^2 = 4$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}$.

De plus, $u'_0 = \frac{1}{4^0} \binom{0}{0} = 1$.

(b) program cb1;

var n,k:integer;

S,u:real;

begin

write('Entrez l'indice supérieur de la somme à calculer: ');

readln(n);

if n < 0

then

writeln('La somme vaut 0') {pas de point-virgule!!}

else

begin

u:=1; {initialisation de la suite u_n}

S:=u; {initialisation de la somme partielle, avec le premier terme}

for k:=1 to n do

begin

u:=u*(2*n+1)/(2*n+2); {calcul du terme suivant de la suite u_n}

S:=S+u; {ajout de ce terme à la somme}

end;

writeln('La somme vaut ',S:0:3); {affichage avec 3 décimales}

end;

end.

5. Étude de la série $\sum \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot x^n$.

(a) Essayons d'appliquer la règle de d'Alembert. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|v_{n+1}x^{n+1}|}{|v_nx^n|} = \frac{(4n+4)!(n!)^4}{(4n)!((n+1)!)^4} \cdot |x| = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^4} \cdot |x|.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|v_{n+1}x^{n+1}|}{|v_nx^n|} = 4^4|x|$. Posons $\ell' = 4^4$.

D'après la règle de d'Alembert, on en déduit que $\sum v_n x^n$ converge absolument si $\ell'|x| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\ell'}$, et diverge grossièrement si $\ell'|x| > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\ell'}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v'_n = \frac{v_n}{(\ell')^n}$.

(b) On s'inspire de la question 3 :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln v'_n - \ln v'_{n-1} &= \ln \frac{v'_n}{v'_{n-1}} = \ln \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)}{n^4} \\ &= \ln \left(\left(1 - \frac{1}{4n}\right) \left(1 - \frac{2}{4n}\right) \left(1 - \frac{3}{4n}\right) \right) \\ &= \ln \left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \ln \left(1 - \frac{2}{4n}\right) + \ln \left(1 - \frac{3}{4n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule rappelée en début d'énoncé,

$$\ln v'_n - \ln v'_{n-1} = -\frac{1}{4n} - \frac{2}{4n} - \frac{3}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Un raisonnement similaire à celui de la question (3d) montre qu'alors $\ln(v'_n) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2} \ln n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n^{\frac{5}{4}} v'_n) = \frac{5}{4} \ln n + \ln v'_n$, donc :

$$\ln(n^{\frac{5}{4}} v'_n) = \frac{5}{4} \ln n - \frac{3}{2} \ln n + o(\ln n) = -\frac{\ln n}{4} + o(\ln n).$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^{\frac{5}{4}} v'_n) = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{4}} v'_n = 0$. Par conséquent, $v'_n = o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.

La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\frac{5}{4} > 1$, donc, d'après un corollaire du théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v'_n$ converge).

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n v'_n| = v'_n$, et $\sum v'_n$ converge. Donc $\sum (-1)^n v'_n$ converge absolument.

N'allez pas utiliser ici un argument de séries alternées !

6. Étude de la série $\sum \frac{(3n)!}{(n!)^3} \cdot x^n$.

(a) Toujours la même chose! Soit $x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{w_{n+1} x^{n+1}}{w_n x^n} \right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \cdot |x|$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{w_{n+1} x^{n+1}}{w_n x^n} \right| = 27|x|$. Ainsi, en posant $\ell'' = 27$, d'après la règle de d'Alembert si $|x| < \frac{1}{\ell''}$, $\sum w_n x^n$ converge absolument (donc converge), et si $|x| > \frac{1}{\ell''}$, $\sum w_n x^n$ diverge grossièrement.

(b) On commence à savoir faire.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(w'_n) - \ln(w'_{n-1}) = \ln \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{27n^3} = \ln \left(1 - \frac{1}{3n}\right) + \ln \left(1 - \frac{2}{3n}\right).$$

$$\text{Ainsi : } \ln(w'_n) - \ln(w'_{n-1}) = -\frac{1}{3n} - \frac{2}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour terminer, l'argument présente une petite difficulté (pour passer du $o(\ln n)$ au $O(1)$ comme on le souhaite). En fait, il faut utiliser le résultat de la deuxième indication de la question (3a), qui montre

que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$ (puisque la différence admet une limite finie). On peut aussi retrouver cette égalité à l'aide de l'encadrement obtenu par la première méthode.

De plus, $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ étant convergente, sa somme partielle est également en $O(1)$. Ainsi, on obtient, en s'inspirant de (3d) : $\ln(w'_n) = -\ln n + O(1)$

(c) Par conséquent, $\ln(nw'_n) = O(1)$. Ainsi, la suite $(\ln(nw'_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(nw'_n) > A$. Soit une telle valeur de A . Alors, en passant à l'exponentielle qui est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nw'_n > e^A$. Il suffit de poser $a = e^A > 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w'_n > \frac{a}{n}$. Comme $\sum \frac{a}{n}$ diverge, on en déduit, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que $\sum w'_n$ diverge.

(d) $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle, car $(\ln(w'_n))$ tend vers $-\infty$. Elle est décroissante à partir d'un certain rang, car $(\ln(w'_n) - \ln(w'_{n-1}))$ est équivalente à une suite négative.

Le même raisonnement que dans la question 4 (séries alternées) amène la convergence de $\sum (-1)^n w'_n$.