Lycée Carnot Mars 2005
ECS 3/4 – Mathématiques

Correction du Devoir surveillé n° 6

Partie I – Décomposition « en éléments simples » de $\frac{P'}{P}$

Théorème 1 *Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont l'ensemble des racines est $R = \{r_1, \dots, r_s\}$, la multiplicité de r_i étant α_i, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$. Alors : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus R,\quad \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{x - r_i}$.*

1. La fonction de $\mathbb{R} \setminus R \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{P'(x)}{P(x)}$ est la dérivée de la fonction qui à x associe $\ln |P(x)|$. **(N'oubliez pas les valeurs absolues SVP !)**

   Or, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus R,\quad P(x) = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{s} (x - r_i)^{\alpha_i}$.

   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus R,\quad \ln |P(x)| = \ln |\lambda| + \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \ln |x - r_i|$,

   d'où, en dérivant par rapport à x : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus R,\quad \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{x - r_i}$.

   Cela fournit donc une égalité entre deux fractions rationnelles sur presque tout $\mathbb{R}$, en tout cas sur une infinité de valeurs. Or, soit $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ deux fractions rationnelles (A, B, C, D sont des polynômes). Si elles coïncident sur une infinité de valeurs, alors le polynôme $AD - BC$ s'annule en une infinité de valeurs, et seul le polynôme nul a une infinité de valeurs. Ainsi, $AD - BC$ est le polynôme nul (sur $\mathbb{C}$). On en déduit que $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ coïncident en tout complexe z n'annulant ni B ni D.

   Au final, on obtient donc : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus R,\quad \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{x - r_i}$.

2. Le résultat qu'on a démontré de manière analytique dans la question 1 se retrouve de manière purement formelle (et donc aussi pour les polynômes de $\mathbb{C}[X]$) en utilisant les règles de dérivation de produits. En effet, soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que dans l'énoncé du théorème. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{s} (X - r_i)^{\alpha_i}.$$

   En dérivant ce produit, on trouve :

$$P'(X) = \lambda \sum_{j=1}^{s} (X - r_1)^{\alpha_1} \cdots (X - r_{j-1})^{\alpha_{j-1}} \cdot \alpha_j \cdot (X - r_j)^{\alpha_j - 1} \cdot (X - r_{j+1})^{\alpha_{j+1}} \cdots (X - r_s)^{\alpha_s}.$$

   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus R$,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \lambda \sum_{j=1}^{s} \frac{(X - r_1)^{\alpha_1} \cdots (X - r_{j-1})^{\alpha_{j-1}} \cdot \alpha_j \cdot (X - r_j)^{\alpha_j - 1} \cdot (X - r_{j+1})^{\alpha_{j+1}} \cdots (X - r_s)^{\alpha_s}}{\lambda (X - r_1)^{\alpha_1} \cdots (X - r_s)^{\alpha_s}} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\alpha_j}{x - r_j}.$$

Remarquez bien que je me garde bien d'écrire une fraction rationnelle avec une variable formelle X, puisque nous n'avons vu la signification d'une telle variable que dans le cadre des polynômes.

Partie II – Le théorème de Bezout

Théorème 2 *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux qui ne soient pas tous les deux constants. Alors il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$ et $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.*

Corollaire 3 *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux qui ne soient pas tous les deux constants, et A un troisième polynôme tel que $\deg A < \deg P + \deg Q$. Alors il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = A$ et $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.*

1. Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux tels que $\deg P \geqslant \deg Q$. On note R le reste de la division euclidienne de P par Q.
   (a) Si P est constante, d'après l'énoncé, $\deg(Q) \leqslant 0$, et P et Q sont tous les deux constants, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. L'hypothèse n'étant pas satisfaite, le théorème est vrai !
   Cette discussion n'a donc pas vraiment de sens. En fait, l'énoncé inversait P et Q. Il fallait supposer Q constant. Dans ce cas, soit $Q = \lambda$, pour une certaine valeur $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors il suffit de choisir $V = \frac{1}{\lambda}$ et $U = 0$. On a bien :
   $$UP + VQ = 1, \qquad \deg U = -\infty < \deg Q \qquad \text{et} \qquad \deg V = 0 < \deg P.$$
   On suppose que P et Q sont tous les deux non constants.
   (b) Si R est nul, alors Q divise P, et comme par hypothèse Q n'est pas constant, il admet (d'après le théorème de d'Alembert-Gauss) une racine dans $\mathbb{C}$, qui est donc aussi racine de P. Cela contredit le fait que P et Q sont premiers entre eux. Ainsi, R est non nul.
   Il existe un polynôme $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = AQ + R$. Soit alors une racine r de Q ; elle n'est pas racine de P puisque P et Q sont premiers entre eux. Donc :
   $$R(r) = P(r) - A(r)Q(r) = P(r) \neq 0.$$
   Ainsi, r n'est pas racine de R. Par conséquent, Q et R n'ont pas de racine commune, et comme ils sont non nuls, ils sont premiers entre eux.
   (c) Supposons que le théorème de Bezout soit vrai pour Q et R. Alors il existe (et on se donne) des polynômes U et V tels que $UQ + VR = 1$. De plus, $R = P - AQ$, donc $UQ + V(P - AQ) = 1$, puis $(U - AV)Q + VP = 1$. Il suffit de poser $U_0 = V$ et $V_0 = U - AV$ pour avoir $U_0P + V_0Q = 1$.
2. On règle ici les conditions de degré qu'on n'a pas considérées dans la question précédente. Soit P, Q, U_0 et V_0 des polynômes tels que $U_0P + V_0Q = 1$. Alors, en effectuant la division euclidienne de U_0 par Q, on obtient l'existence de deux polynômes A et B, avec $\deg B < \deg Q$, tels que $U_0 = AQ + B$. Alors, en remplaçant dans l'équation $U_0P + V_0Q = 1$, on obtient :
   $$(AQ + B)P + V_0Q = 1 \qquad \text{soit:} \qquad BP + (AP + V_0)Q = 1.$$
   Posons $U = B$ et $V = AP + V_0$. Alors $\deg U < \deg Q$ et, puisque $U \neq 0$ (sinon Q est constante) :
   $$\deg V + \deg Q = \deg(VQ) = \deg(1 - UP) \leqslant \deg UP = \deg U + \deg P < \deg P + \deg Q,$$
   soit : $\deg V < \deg P$.
3. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: « Le théorème de Bezout est vrai pour tous polynômes P et Q tels que $n = \min(\deg(P), \deg(Q))$ ».
   $\mathcal{P}(0)$ est vrai, car c'est le cas où un des deux polynômes (et un seul) est de degré 0, donc constant, et quitte à échanger le rôle de P et Q, on est dans les conditions de la question 1a.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $m \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathcal{P}(m)$ soit satisfait. Soit P et Q tels que $\min(\deg(P), \deg(Q)) = n$. Alors, quitte à échanger le rôle de P et Q, on peut supposer que $\deg Q = n$. Suivons les étapes de la question 1. Soit R le reste de la division de P par Q. Alors Q et R sont premiers entre eux, ne sont pas tous les deux constants (car $n \geqslant 1$), et puisque $\deg R < \deg Q$, $\min(\deg R, \deg Q) < n$. Ainsi, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q et R : le théorème de Bezout est vrai pour Q et R. D'après la question 1c, puis la question 2, on en déduit qu'il est vrai pour P et Q. Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vérifié.
   D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre le théorème 2.
4. Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux, non tous les deux constants. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes U_0 et V_0 tels que $U_0P + V_0Q = 1$, donc $AU_0P + AV_0Q = A$.
   Effectuons la division euclidienne de AU_0 par Q, il existe donc B et R deux polynômes tels que $AU_0 = BQ + R$, et $\deg R < \deg Q$. Ainsi :
   $$(BQ + R)P + AV_0Q = A \qquad \text{soit:} \qquad RP + (AV_0 + BP)Q = A.$$
   On a $\deg R < \deg Q$, et par un raisonnement similaire à la question 2, du fait que $\deg A < \deg P + \deg Q$,
   $$\deg(AV_0 + BP) + \deg Q = \deg(A - RP) \leqslant \max(\deg RP, \deg A) < \deg P + \deg Q,$$
   soit : $\deg(AV_0 + BP) < \deg P$. Il suffit donc de poser $U = R$ et $V = AV_0 + BP$.

5. (a)

```
procedure division(P,Q:polynome; var S,R:polynôme);
begin
  S:=0*monome(0);   {quotient initial nul}
  R:=P;             {reste initial égal à P}
  while deg(R) >= deg(Q) do
    begin
      S:=S+coefficient(R,deg(R))/coefficient(Q,deg(Q))*monome(deg(R)-deg(Q));
      R:=R-coefficient(R,deg(R))/coefficient(Q,deg(Q))*Q;
    end;
end;
```

(b) On va suivre le procédé de la démonstration qu'on a faite : si un des polynômes est constant, on peut donner directement le résultat, sinon, on se ramène à (Q, R), couple en lequel on évaluera récursivement l'algorithme. Une discussion sera nécessaire pour savoir lequel des deux polynômes P et Q est de plus petit degré.

```
procedure Bezout1(P,Q:polynome; var U,V:polynome);
var S,R,U1,V1,W:polynome;
begin
if (deg(P)<=0) and (deg(Q)<=0) then writeln('erreur') else
  if deg(P)=0
  then
    begin
      U:= 1/constante(P)*monome(0);     {Si P constante, U=1/P et V=0}
      V:=0*monome(0);
    end
  else
    if deg(Q)=0
    then
       begin
         V:= 1/constante(Q)*monome(0);  {Si Q constante, V=1/Q et U=0}
         U:=0*monome(0);
       end
    else
      if deg(P) >= deg(Q)
      then
        begin
          division(P,Q,S,R);            {Calcul du reste R}
          Bezout1(Q,R,U1,V1);           {Bezout appliqué à Q et R, d'après 1b}
          U:=V1;                        {expression de U et V d'après 1c}
          V:=U1-S*V1;
        end
      else
        begin
          division(Q,P,S,R);            {De même en inversant le rôle de P et Q}
          Bezout1(P,R,U1,V1);
          V:=V1;
          U:=U1-S*V1;
        end;
end;
```

(c) Il s'agit d'implémenter la question 2 :

```
procedure Bezout2(P,Q:polynome;var U,V:polynome);
var U0,V0,A,B:polynome;
begin
  Bezout1(P,Q,U0,V0);
  division(U0,Q,A,B);
  U:=B;
  V:=A*P+V0;
end;
```

Partie III – Décomposition en éléments simples

Théorème 4 *Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $R = \{r_1, \ldots, r_s\}$ l'ensemble des racines (complexes) distinctes de Q. Alors il existe une décomposition de $\frac{P}{Q}$ de la forme suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus R, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{s} F_i(x), \qquad \textit{où} \qquad \forall i \in [\![1, s]\!], \ \forall x \in \mathbb{C} \setminus R, \quad F_i(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(x - r_i)^j},$$

α_i étant l'ordre de multiplicité de la racine r_i dans Q, E étant un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, et les $\lambda_{i,j}$ étant des nombres complexes.

1. Soit $i \in [\![1, s]\!]$. Alors, pour tout $j \in [\![1, \alpha_i]\!]$, Q est divisible par $(X - r_i)^j$. Ainsi, $\frac{\lambda_{i,j} Q}{(X - r_i)^j}$ est un polynôme de degré $d < \deg Q$. Par conséquent, $Q(X)F_i(X)$ est un polynôme de degré strictement plus petit que celui de Q. On obtient donc l'égalité :

$$P = EQ + \sum_{i=1}^{s} QF_i,$$

   où $\sum\limits_{i=1}^{s} QF_i$ est un polynôme de degré strictement plus petit que celui de Q. D'après l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne de P par Q, on en déduit que E est unique, et est égal au quotient de cette division.

   Supposons que le théorème soit vrai pour tout (P, Q) tels que $\deg P < \deg Q$. Soit P_1 et P_2 deux polynômes quelconques. Effectuons la division euclidienne de P_1 par Q_1 : il existe E et P tels que $P_1 = EQ_1 + P$, puis :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus R, \quad \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = E + \frac{P(z)}{Q_1(z)},$$

   avec cette fois $\deg P < \deg Q_1$. Ainsi, d'après notre hypothèse, le théorème est vrai pour le couple (P, Q_1). Les racines et leur multiplicité apparaissant dans le théorème pour ce couple sont celles de Q_1, donc les mêmes que celles pour le couple (P_1, Q_1). Ainsi, l'expression $\sum\limits_{i=1}^{s} F_i$ est de la même forme dans les deux expressions, et l'on passe de l'une à l'autre en rajoutant le polynôme E. Cela prouve le théorème pour le couple (P_1, Q_1).

   Par conséquent, on déduit le cas général du cas où $\deg P < \deg Q$.

2. **Exemples.**

   (a) Soit $P = X^4$ et $Q = (X - 2)(X - 1)(X + 1)(X + 2)$. Déterminons E, le quotient de P par Q. Ce sont deux polynômes de même degré, de même coefficient dominant, donc $E = 1$. De plus les quatre racines de Q sont simples donc les expressions F_i sont de la forme

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus R, \quad F_i(x) = \sum_{j=1}^{1} \frac{\lambda_{i,j}}{x - r_i} = \frac{\lambda_{i,1}}{x - r_i}.$$

   On en déduit qu'il existe des complexes a, b, c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2, -1, -2\}, \quad \frac{x^4}{(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}.$$

   (b) On détaille moins les exemples suivants. On commence par effectuer la division de $X^5 + 1$ par $(X^2 + X + 1)^2 = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Le quotient est $E = X - 2$. De plus, les racines de Q sont $j = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}}$ et j^2, de multiplicité 2 chacune. Ainsi, il existe des complexes a, b, c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{j, j^2\}, \quad \frac{x^5 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = x - 2 + \frac{a}{x - j} + \frac{b}{(x - j)^2} + \frac{c}{x - j^2} + \frac{d}{(x - j^2)^2}.$$

   (c) Soit $P = 1$ et $Q = X^n(X - 1)$. Ici, $\deg(P) < \deg Q$, donc $E = 0$. De plus, 1 est racine simple de Q et 0 est racine d'ordre n. Ainsi, il existe des complexes $a_1, \ldots, a_n$ et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{x^n(x-1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{b}{x-1}.$$

4. La question n'a de sens que si $s > 1$; dans le cas inverse, le résultat est trivial avec $P_1 = 0$.
   Puisque Q est unitaire, $Q = (X-r_1)^{\alpha_1} \cdot (X-r_2)^{\alpha_2} \cdots (X-r_s)^{\alpha_s}$. Or, $(X-r_1)^{\alpha_1}$ et $(X-r_2)^{\alpha_2} \cdots (X-r_s)^{\alpha_s}$ sont premiers entre eux, de degrés respectifs α_1 et $\sum_{i=2}^{s} \alpha_i$. Comme $\deg P < \deg Q = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{s} \alpha_i$, on peut utiliser le corollaire du théorème de Bezout : il existe des polynômes A_1 et P_1, tels que :

$$P(X) = A_1(X)(X-r_2)^{\alpha_2} \cdots (X-r_s)^{\alpha_s} + P_1(X)(X-r_1)^{\alpha_1}, \qquad \text{et} \qquad \deg(A_1) < \alpha_1,\ \deg(P_1) < \sum_{i=2}^{s} \alpha_i.$$

   Soit de tels polynômes A_1 et P_1. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C} \setminus R,\ \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1(X)(X-r_2)^{\alpha_2} \cdots (X-r_s)^{\alpha_s} + P_1(X)(X-r_1)^{\alpha_1}}{(X-r_1)^{\alpha_1}(X-r_2)^{\alpha_2} \cdots (X-r_s)^{\alpha_s}} \\ &= \frac{A_1(x)}{(x-r_1)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-r_2)^{\alpha_2} \cdots (x-r_s)^{\alpha_s}}. \end{aligned}$$

5. On raisonne par récurrence sur l'entier s $\mathbb{N}^*$. Si $s = 1$, le résultat est trivial. De plus la question précédente permet de se ramener d'un produit de s termes à un produit de $s-1$ termes, ce qui fournit l'hérédité de la récurrence.
6. On raisonne par récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}^*$ pour montrer l'existence.
   Si $\alpha = 1$, $\deg P = 0$, donc P est une constante λ, il suffit de poser $\lambda_0 = \lambda$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété d'existence vraie pour des polynômes P de degré au plus $n-1$ (donc $\alpha \leqslant n$), et soit A un polynôme de degré n (donc $\alpha = n+1$). Soit $\lambda_n = \lambda_{\alpha-1}$ son coefficient dominant. Alors le degré de $A - \lambda_{\alpha-1}(X-r)^{\alpha-1}$ est au plus n ; de plus, le coefficient de son terme de degré n est nul. Donc A est de degré $d < n$. Il existe donc, d'après l'hypothèse de récurrence, des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_d$ tels que

$$A - \lambda_{\alpha-1}(X-r)^{\alpha-1} = \lambda_0 + \lambda_1(X-r) + \cdots + \lambda_d(X-r)^d.$$

   En posant $\lambda_{d+1} = \cdots = \lambda_{\alpha-2} = 0$, on obtient :

$$A = \lambda_0 + \lambda_1(X-r) + \cdots + \lambda_{\alpha-1}(X-r)^{\alpha-1}.$$

   D'après le principe de récurrence, la propriété d'existence est donc vérifiée pour tout α. Montrons maintenant l'unicité. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{\alpha-1}$, et $\mu_0, \dots, \mu_{\alpha-1}$ tels que :

$$A = \lambda_0 + \lambda_1(X-r) + \cdots + \lambda_{\alpha-1}(X-r)^{\alpha-1} = \mu_0 + \mu_1(X-r) + \cdots + \mu_{\alpha-1}(X-r)^{\alpha-1}.$$

   Alors : $(\lambda_0 - \mu_0) + (\lambda_1 - \mu_1)(X-r) + \cdots + (\lambda_{\alpha-1} - \mu_{\alpha-1})(X-r)^{\alpha-1} = 0$.
   Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{\alpha-1}) \neq (\mu_0, \dots, \mu_{\alpha-1})$, il existe un plus grand indice $k \in [\![0, \alpha-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq \mu_k$. Alors :

$$(\lambda_0 - \mu_0) + (\lambda_1 - \mu_1)(X-r) + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)(X-r)^k = 0,$$

$$\text{puis:} \qquad \deg\left((\lambda_0 - \mu_0) + (\lambda_1 - \mu_1)(X-r) + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)(X-r)^k\right) = k \neq -\infty,$$

   d'où une contradiction.
7. Soit $i \in [\![1, s]\!]$. Alors, d'après la question précédente, il existe des complexes $\lambda_{i,\alpha_i}, \dots, \lambda_{i,1}$ (remarquez l'inversion des d'indices effectuée) tels que :

$$A_i = \lambda_{i,\alpha_i} + \lambda_{i,\alpha_{i-1}}(X-r_i) + \cdots + \lambda_{i,1}(X-r_i)^{\alpha_i - 1}.$$

   On obtient alors, en quotientant par $(x-r_i)^{\alpha_i}$: $\forall x \in \mathbb{C} \setminus R,\ \dfrac{A_i(x)}{(x-r_i)^{\alpha_i}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(x-r_i)^j}$.
   On pose F_i égal à cette expression, et on retombe exactement sur l'énoncé du théorème 4.
8. **Application au calcul d'intégrales**
   (a) Premier exemple
      i. Soit $P = 1$ et $Q = (X+1)(X+2)$. Comme $\deg P < \deg Q$, la partie polynomiale de la décomposition en éléments simples est nulle : $E = 0$. De plus, Q admet deux racines -1 et -2 de multiplicité 1. Donc, d'après le théorème 4, il existe des complexes a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2\},\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

ii. On multiplie par $x+1$: $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2\}$, $\dfrac{1}{x+2} = a + \dfrac{b}{x+2} \cdot (x+1)$.
En prenant la limite lorsque x tend vers -1, on trouve : $1 = a$.

iii. On multiplie cette fois par $(x+2)$: $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2\}$, $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{a}{x+1} \cdot (x+2) + b$.
En prenant la limite lorsque x tend vers -2, on trouve : $-1 = b$.

iv. Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x = \Big[\ln|x+1| - \ln|x+2| \Big]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3.$$

v. On applique la même méthode. Le degré du numérateur étant strictement inférieur au degré du dénominateur, le théorème 4 affirme l'existence de complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \ldots, -n\}, \quad \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x+k}$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Pour déterminer λ_k, nous utilisons la technique décrite en (ii). Nous multiplions cette égalité par $x+k$: pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \ldots, -n\}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k+1)\cdots(x+n)} \\
&\qquad = \lambda_k + (x+k)\left(\frac{\lambda_1}{x+1} + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{x+k-1} + \frac{\lambda_{k+1}}{x+k+1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x+n} \right)
\end{aligned}$$

En prenant la limite de cette expression lorsque x tend vers $-k$, on trouve :

$$\lambda_k = \frac{1}{(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1 \cdots (n-k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdots(x+n)} &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{1}{x+k} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-1)!} \cdot (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+k} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (\ln(k+1) - \ln k) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \ln(k) \right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \ln(k+1) - (-1)^{k} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \right).
\end{aligned}$$

Or, $\ln(1) = 0$ et $\binom{n-1}{n} = 0$ par convention, donc la deuxième somme peut être indexée de 1 à n, et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdots(x+n)} &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} \ln(k+1) \right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) \ln(k+1) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \ln(k+1), \text{ d'après la formule de Pascal.}
\end{aligned}$$

(b) Deuxième exemple.

i. Soit $P = 1$ et $Q = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$. Comme $\deg(P) < \deg(Q)$, la partie polynomiale de la décomposition en éléments simples est nulle. De plus, les racines de Q sont 1, de multiplicité 2, et -1, de multiplicité 1. Ainsi, d'après le théorème 4, il existe des complexes a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad \frac{1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}.$$

ii. Pour déterminer b, multiplions par $(x-1)^2$:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad \frac{1}{x+1} = a(x-1) + b + \frac{c}{x+1} \cdot (x-1)^2.$$

En prenant la limite lorsque x tend vers 1, on obtient : $b = \frac{1}{2}$.

Pour déterminer c, multiplions par $x+1$:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} \cdot (x+1) + \frac{b}{(x-1)^2} \cdot (x+1) + c.$$

En prenant la limite lorsque x tend vers -1, on obtient : $c = \frac{1}{4}$.

iii. Multiplions par x : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}, \quad \dfrac{x}{(x-1)(x^2-1)} = \dfrac{ax}{x-1} + \dfrac{bx}{(x-1)^2} + \dfrac{cx}{x+1}.$

En prenant la limite de cette expression en $+\infty$, il vient : $0 = a + c$, soit : $a = -c = -\frac{1}{4}$.

iv. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-1)} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1/4}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{1/4}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}(\ln \frac{1}{2} - \ln 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{-1} \right) + \frac{1}{4}(\ln 32 - \ln 1) \\
&= \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Partie IV – Autour d'une conjecture d'Ilieff et Sendov

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, de degré au moins égal à 2. Soit z une racine de S. On dit que S et z vérifient (IS) s'il existe une racine ζ du polynôme dérivé S' telle que $|z - \zeta| \leqslant 1$. On dit que S vérifie (IS) si pour toute racine z de S, z et S vérifient (IS).

Conjecture 5 *Tout polynôme de degré au moins égal à 2 et dont les racines sont de module au plus égal à 1 vérifie (IS).*

1. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est égal au degré n de P. Donc : $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = n$. De plus, P est scindé, et de coefficient dominant a_n, donc :

$$P = a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{\alpha_i}.$$

2. Soit P un polynôme de degré 2, de racines r et s (éventuellement égales) et de coefficient dominant λ. Alors $P = \lambda(X-r)(X-s)$. En dérivant ce produit, on obtient : $P' = \lambda(X-r) + \lambda(X-s) = \lambda(2X - (r+s))$. Par conséquent, la racine de P' est $\frac{r+s}{2}$. On vérifie que cette racine est à distance moins de 1 des racines de P (ce qui graphiquement est évident puisqu'il s'agit du milieu des deux racines, qui sont de module au plus un, donc éloignées d'au plus 2) :

$$\left| r - \frac{r+s}{2} \right| = \left| \frac{r-s}{2} \right| \leqslant \frac{|r| + |s|}{2} \leqslant \frac{1+1}{2} = 1.$$

Donc P et r vérifient (IS), et de même, P et s vérifient (IS). Par conséquent, P vérifie (IS).

3. (a) Si $\alpha_i \geqslant 2$, alors z_i est aussi racine de P', et il existe donc une racine de P' à distance 0 (donc inférieur à 1) de z_i. On en déduit que P et z_i vérifient (IS).

   (b) Si P n'a pas de racine simple, pour tout $i \in [\![0,m]\!]$, $\alpha_i \geqslant 2$, et d'après la question précédente, P et z_i vérifient (IS). Cela étant vrai avec toute racine de P, P vérifie (IS).

4. Pour tout $i \in [\![0,m]\!]$, z_i est racine d'ordre $\alpha_i - 1$ de P'. Ainsi, $\prod\limits_{i=0}^{m}(X-z_i)^{\alpha_i-1}$ divise P'. Il existe donc un polynôme Q tel que

$$P = Q \cdot \prod_{i=0}^{m}(X-z_i)^{\alpha_i-1}.$$

De plus, les z_i ne sont pas racines de Q, sinon leur multiplicité dans P' ne serait pas égale à $\alpha_i - 1$. Ainsi, Q n'admet que des racines distinctes des z_i. De plus,

$$\deg(Q) = \deg(P') - \deg\left(\prod_{i=0}^{m}(X-z_i)^{\alpha_i-1}\right) = n-1-(n-(m+1)) = m.$$

Ainsi, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, Q admet exactement m racines $w_1, \dots, w_m$ (pas forcément distinctes entre elles, mais distinctes des z_i). Il existe donc un complexe λ tel que :

$$P' = \lambda \cdot \prod_{i=0}^{m}(X-z_i)^{\alpha_i-1} \cdot \prod_{j=1}^{m}(X-w_j).$$

Le complexe λ est le coefficient dominant de P', égal à na_n (obtenu en dérivant a_nX^n).

5. *On suppose* $\alpha_0 = 1$.

   (a) Dérivons l'expression de P trouvée dans la première question :

$$P' = a_n \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (X-z_0)^{\alpha_0} \cdots (X-z_i)^{\alpha_i-1} \cdots (X-z_m)^{\alpha_m}.$$

Ainsi : $\dfrac{P'}{na_n \prod\limits_{i=0}^{m}(X-z_i)^{\alpha_i-1}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i(X-z_0)\cdots(X-z_{i-1})(X-z_{i+1})\cdots(X-z_m).$

D'après la question 4, on obtient donc l'identité :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(X-z_0)\cdots(X-z_{i-1})(X-z_{i+1})\cdots(X-z_m) = \prod_{j=1}^{m}(X-w_j).$$

Évaluons cette expression en z_0. Les termes de la somme de gauche s'annulent tous en z_0, sauf celui correspondant à $i = 0$. Ainsi :

$$\prod_{j=1}^{m}(z_0-w_j) = \frac{\alpha_0}{n}(z_0-z_1)\cdots(z_0-z_m) = \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{m}(z_0-z_i).$$

   (b) On suppose que $n \geqslant 2^m$. Alors :

      i. $\left|\prod\limits_{j=1}^{m}(z_0-w_j)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\prod\limits_{i=1}^{m}|z_0-z_i| \leqslant 1,$
      car pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $|z_0-z_i| \leqslant |z_0|+|z_i| \leqslant 2$.

      ii. Au moins un des facteurs du produit du (i) est de module inférieur à 1. Il existe donc $j \in [\![1,m]\!]$ tel que $|z_0-w_j| \leqslant 1$. Ainsi, P et z_0 vérifient (IS).

      iii. De même, pour toute racine simple z de P, P et z vérifient (IS) (même raisonnement), et d'après ce qu'on a vu plus haut, si z est une racine multiple de P, P et z vérifient (IS). Ainsi, pour toute racine z de P, P et z vérifient (IS), ce qui signifie que P vérifie (IS).

   (c) On ne suppose plus $n \geqslant 2^m$, mais toujours $\alpha_0 = 1$. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$.

i. On a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0, \dots, z_m\}$: $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{z - z_i}$.

En évaluant en w_j (distinct des z_i), on obtient : $0 = \dfrac{P'(w_j)}{P(w_j)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{w_j - z_i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i(\overline{w_j} - \overline{z_i}}{|w_j - z_i|^2}$

Ainsi : $\overline{w_j} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{|w_j - z_i|^2} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i \overline{z_i}}{|w_j - z_i|^2}$.

En posant pour tout $i \in [\![0, m]\!]$, $\lambda_i = \dfrac{1}{|w_j - z_i|^2} > 0$, on obtient :

$$\overline{w_j} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{z_i}}{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i}, \qquad \text{soit, en conjuguant :} \qquad w_j = \frac{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i z_i}{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i}.$$

Cela est bien l'expression d'un barycentre à coefficients strictement positifs des z_i, $i \in [\![0, m]\!]$.

ii. Ainsi,

$$|w_j| \leqslant \frac{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i |z_i|}{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i} \leqslant \frac{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i 1}{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i} = 1.$$

iii. Si $z_0 = 0$, puisque $n \geqslant 2$ et $\alpha_0 = 1$, on a forcément $m \geqslant 1$. Ainsi, l'ensemble $\{w_j, j \in [\![1, m]\!]\}$ des racines de P' qui ne sont pas racines de P est non vide. Soit donc $j \in [\![1, m]\!]$ et w_j une telle racine. Alors :

$$|z_0 - w_j| = |w_j| \leqslant 1,$$

ce qui montre que P et $z_0 = 0$ vérifient (IS).

iv. D'après le point précédent, P et 0 vérifient (IS). De plus, si z est une autre racine de P, z est une racine multiple, et d'après (3a), P et z vérifient (IS). Ainsi, pour toute racine z de P, P et z vérifient (IS), ce qui signifie que P vérifie (IS).

6. (a) Soit s_j, $j \in [\![1, k]\!]$ les racines deux à deux distinctes de P', de multiplicités respectives γ_i, $i \in [\![1, k]\!]$. Alors, pour tout $z \notin \{s_j, j \in [\![1, k]\!]\}$, si on regroupe dans la somme les termes t_i égaux,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{z - t_i} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i | t_i = s_j} \frac{1}{z - s_j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathrm{Card}\{i \mid t_i = s_j\}}{z - s_j}.$$

Or, le cardinal de $\{i \mid t_i = s_j\}$ est le nombre de racines de P' égales à s_j, c'est-à-dire la multiplicité de la racine s_j dans P', donc γ_i. Ainsi :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{z - t_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma_j}{z - s_j} = \frac{P''(z)}{P'(z)},$$

d'après le théorème 1 appliqué à P'.

(b) Supposons que P et z_0 ne vérifient pas (IS). Alors, pour toute racine t_i de P', $|z_0 - t_i| > 1$, d'où :

$$\left| \frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| < \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n - 1.$$

En contraposant, si $\left| \dfrac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| \geqslant n - 1$, alors P et z_0 vérifient (IS).

(c) i. **L'énoncé était faux.** Il fallait lire : $\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} = 2\frac{Q'(z_0)}{Q(z_0)}$ (il manquait un facteur 2, et l'égalité n'était vraie que pour z_0...)

Ceci étant corrigé, nous obtenons, en dérivant l'équation $(X - z_0)Q = P$:

$$P' = (X - z_0)Q' + Q \qquad \text{et} \qquad P'' = (X - z_0)Q'' + 2Q'.$$

Ainsi : $\dfrac{P'(z_0)}{P''(z_0)} = 2\dfrac{Q(z_0)}{Q'(z_0)}$.

ii. Or, puisque $\alpha_0 = 1$, les racines de Q sont celles de P sauf z_0, avec même multiplicité.
Par conséquent, d'après le théorème 1 : $\dfrac{Q(z_0)}{Q'(z_0)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{z_0 - z_i}$.
Il en découle que : $\dfrac{P''(z_0)}{P'(z_0)} = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{z_0 - z_i}$.

(d) *On suppose que* $z_0 = 1$.

i. Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ tel que $|z| \leqslant 1$ et $|z| \neq 1$. Alors $a^2 + b^2 \leqslant 1$, et :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a-\mathrm{i}\, b} = \frac{1-a+\mathrm{i}\, b}{a^2+b^2+1-2a}.$$

Ainsi, $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1-a}{a^2+b^2+1-2a}$.
Or, $a < a^2 + b^2 \leqslant 1$ (l'inégalité stricte provient de $z \neq 1$), donc $0 < a^2 + b^2 + 1 - 2a \leqslant 2 - 2a$.
La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient alors :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geqslant \frac{1-a}{2-2a} = \frac{1}{2}.$$

ii. Puisque $z_0 = 1$, les autres racines z_i sont distinctes de 1, et de plus, par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $|z_i| \leqslant 1$. D'après la question précédente, il vient donc :

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{1-z_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_i}{1-z_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i - \alpha_0\right) = \frac{n-1}{2}.$$

iii. D'après la question (6c) corrigée, il en résulte que $\mathrm{Re}\left(\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)}\right) \geqslant n-1$, donc, d'après la question (6a) :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t_i}\right) \geqslant n-1.$$

Cette somme de $n-1$ réels étant plus grande que $n-1$, au moins un des réels de la somme est plus grand que 1 (raisonner par l'absurde !). Ainsi, il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathrm{Re}(\frac{1}{1-t_i}) \geqslant 1$.

iv. Soit i tel que dans la question précédente, et soit $t_i = a + \mathrm{i}\, b$. Alors

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-t_i}\right) = \frac{1-a}{a^2+b^2+1-2a} \geqslant 1,$$

soit : $1 - a \geqslant a^2 + b^2 + 1 - 2a$, puis : $a^2 + b^2 - a \leqslant 0$, puis : $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 \leqslant \frac{1}{4}$.
On obtient donc : $|t_i - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$.
Alors $|t_i - 1| \leqslant |t_i - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2} - 1| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
On en déduit qu'il existe une racine t_i de P' telle que $z_0 = 1$ et t_i vérifient $|z_0 - t_i| \leqslant 1$. Ainsi, P et z_0 vérifient (IS).

(e) On suppose que $|z_0| = 1$ et $\alpha_0 = 1$. Soit $\tilde{P}$ le polynôme égal à $\tilde{P}(X) = P(z_0 X)$ (on effectue une rotation d'angle opposé à l'argument de z_0, pour ramener z_0 en 1). Alors les racines de P sont 1 et les $\overline{z_0} \cdot z_i$, $i \in [\![1, m]\!]$, et les racines de $\tilde{P}'$ sont les $\overline{z_0} \cdot t_i$. Il existe donc, d'après le point précédent, une racine $\overline{z_0} \cdot t_i$ de $\tilde{P}'$ tel que $|\overline{z_0} t_i - 1| \leqslant 1$, donc une racine t_i de P' tel que $|t_i - z_0| \leqslant |z_0| = 1$.
Ainsi, P et z_0 vérifient (IS).

7. Soit z une racine de P.
   - Si z est une racine multiple, P et z vérifient (IS) d'après la question (3a).
   - Si z est une racine simple, elle est soit nulle, soit de module 1, et P et z vérifient (IS) soit d'après la question (5c)-iii, soit d'après la question (6e).

   Ainsi, P vérifie (IS).