Correction de l'interrogation n° 2

1. Voir le cours !
2. Voir le cours !
3. Si $P \neq 0$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité, puisque P est de degré au plus n. Cela contredit l'énoncé, qui donne $n+1$ racines distinctes pour P.
4. Le reste R est caractérisé par :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], \exists R \in \mathbb{R}_1[X],\ (X\cos t + \sin t)^n = (X^2+1)Q + R = (X^2+1)Q + aX + b,$$

où on a écrit $R = aX + b$. En évaluant en i, on obtient :

$$a\,\mathrm{i} + b = (\mathrm{i}\cos t + \sin t)^n = \mathrm{i}^n(\cos t - \mathrm{i}\sin t)^n = \mathrm{i}^n(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})^n = \mathrm{i}^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}$$

On remarquera qu'ici, on n'a pas besoin d'évaluer en $-\mathrm{i}$, cela donnerait la même équation. On peut se contenter d'identifier parties réelles et parties imaginaires. Ainsi, en distinguant suivant la parité de n (à cause du i^n) :

$$\begin{cases} a = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin(nt) & b = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(nt) & \text{si } n \text{ est pair} \\ a = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(nt) & b = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin(nt) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

5. Soit P tel que P' divise P, et soit n le degré de P. On ne peut pas avoir $P \leqslant 0$, car alors $P' = 0$, et 0 ne divise aucun polynôme. Ainsi, $n \geqslant 1$.

Soit $r_1, \dots, r_k$ les racines deux à deux distinctes de P, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Alors, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = n$.

Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, α_i est racine de multiplicité $\alpha_i - 1$ de P', et P' n'admet pas d'autre racine, car P' divise P (donc toutes les racines de P' sont aussi des racines de P). Ainsi, le nombre de racines de P' comptées avec multiplicité est $\sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1) = \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i - k = n - k$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, ce nombre doit être égal au degré de P', donc $n-1$. Ainsi, $k = 1$. Le polynôme P n'admet donc qu'une racine, qui est forcément de multiplicité n. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{C}$ tels que $P = \lambda(X-r)^n$.

Réciproquement, ces polynômes conviennent.

6. Il s'agit des racines 4$^{\text{e}}$ de $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Une racine pariculière est $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$. On trouve les autres en multipliant celle-ci par les quatre racines 4$^{\text{e}}$ de 1, à savoir 1, i, -1 et $-\mathrm{i}$. Ainsi, les racines de $X^4 + \mathrm{i}$ sont :

$$\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}\}.$$

7. On utilise bien sûr l'exponentielle complexe !

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\mathrm{i}\,kx}\right) = \mathrm{Re}((1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x})^n) \qquad \text{(formule du binôme)} \\ &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,nx}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\,x}{2}})^n\right) \qquad \text{(pensez à symétriser !)} \\ &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,nx}{2}} 2^n \cos^n\frac{x}{2}\right) = 2^n\cos\frac{nx}{2}\cos^n\frac{x}{2}. \end{aligned}$$