LYCÉE CARNOT
ECS 4 – Mathématiques
A. TROESCH

Pour le jeudi 5 janvier 2005

Devoir Maison n° 10 – Temps d'attente de la première série de r succès

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p (ceci signifiant qu'à chaque expérience, la probabilité de succès est égale à p, où p est un réel donné tel que $0 < p < 1$).
Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, avant d'étudier dans la partie II l'obtention de r succès consécutifs (où r désigne un entier donné tel que $r \geqslant 2$).

PARTIE I – Étude d'une suite définie par une récurrence

On se propose dans cette partie d'obtenir la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout entier naturel $n \geqslant r-1$, la relation :

$$u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \cdots + p^{r-1}u_{n-r+1} = p^r. \qquad (1)$$

1. Montrer qu'il existe un réel a, que l'on explicitera en fonction de r et p, tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - a$ vérifie la relation de récurrence :
$$\forall n \geqslant r-1, \qquad v_n + pv_{n-1} + p^2v_{n-2} + \cdots + p^{r-1}v_{n-r+1} = 0.$$
2. On note $\omega_r = \mathrm{e}^{\frac{2\,i\,\pi}{r}}$ la racine r-ième de l'unité de plus petit argument strictement positif. Montrer que le polynôme
$$X^{r-1} + pX^{r-2} + p^2X^{r-3} + \cdots + p^{r-1} = 0.$$
admet $r-1$ racines distinctes, que l'on exprimera en fonction de p et ω_r.
3. Montrer qu'il existe des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ tels que pour tout $n \geqslant 0$,
$$v_n = (\lambda_1\omega_r^n + \lambda_2\omega_r^{2n} + \cdots + \lambda_{r-1}\omega_r^{(r-1)n})p^n.$$
4. Déterminer l'existence et la valeur de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On rappelle que $0 < p < 1$.

PARTIE II – Temps d'attente du r-ième succès

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r succès consécutifs au cours de la suite des expériences de Bernoulli décrites dans le préambule.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désignera par S_n l'événement :

« Obtenir un succès à la n-ième expérience. »

1. **Probabilité d'obtenir au moins une suite de r succès.**
On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'événement $E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \cdots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn}$, c'est-à-dire :
« Obtenir un succès aux expériences $rn-(r-1), \ldots, rn-1$ et rn. »
   (a) Déterminer la probabilité des événements suivants :
$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_k} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k} = \overline{E_1} \cap \cdots \cap \overline{E_k} \cap \cdots.$$
   (b) En déduire que l'obtention de r succès consécutifs est un événement presque-certain.
2. **Probabilité d'obtenir une suite de r succès s'achevant à la n-ième expérience.**
Pour tout entier $n \geqslant r$, on désigne par U_n l'événement :

   « Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la n-ième expérience, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs. »

   Par exemple, si $r = 3$, et si on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par :

$$\underline{S\ S\ S}\ \underline{S\ S\ S}\ S\ E\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ S\ E\ S\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ E\ \ldots$$

   mène à la réalisation des événements U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, …, c'est-à-dire de suites de 3 succès consécutifs s'achevant aux expériences 3, 6, 12, 20, ….

On note enfin u_n *la probabilité de l'événement* U_n. *On posera* par convention $u_0 = 1$ *et* $u_1 = u_2 = \ldots = u_{r-1} = 0$.

(a) Montrer que la réalisation de l'événement $S_{n-(r-1)} \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n$ implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \ldots, U_{n-1}, U_n$ pour $n \geqslant r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation (1). Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

(b) En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'un suite de 2 *"Face"* (respectivement de 2 *"as"*) consécutifs s'achève à la n-ième expérience dans une suite de jets d'une pièce équilibrée (respectivement d'un dé à 6 faces équilibré).

3. **Étude de la première suite de r succès consécutifs.**

On désigne par X *la variable aléatoire indiquant le numéro* n *de l'expérience où,* pour la première fois, *s'achève une suite de* r *succès consécutifs. Dans l'exemple donné dans la question 2,* X *prend donc la valeur* 3. *On posera* par convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \cdots = P(X = r-1) = 0$.

(a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question 1 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

(b) On pose, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$: $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que :

$$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1-(px)^r} \cdot \frac{1-px}{1-x}.$$

(c) Pour tout entier $n \geqslant r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences. En déduire la relation suivante, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) u_{n-k} \qquad (2)$$

(d) À tout couple de séries convergentes *à termes positifs* $\sum a_n$ et $\sum b_n$, on associe la série, dite série-produit $\sum c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0$.

Vérifier que pour tout entier naturel n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k$.

En déduire la convergence et la somme de la série-produit $\sum c_n$.

(e) On pose, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$: $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) x^n$.

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant $U(x)$ et $G(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$ (on pourra multiplier (2) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geqslant 1$).

(f) En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en $x = 1$.

4. **Temps d'attente moyen de la première suite de r succès consécutifs.**

(a) *On* admet *que l'on peut dériver terme à terme la fonction* G *sur* $[0, 1]$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r succès consécutifs.

(b) *On suppose que* $p = \frac{1}{2}$ *(pièce équilibrée), puis* $p = \frac{1}{6}$ *(dé équilibré), et l'on effectue à chaque seconde une expérience.*
Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs lorsque $r = 5$, $r = 10$, $r = 25$.
(À titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à 15 milliards d'années).