LYCÉE CARNOT
ECS 4 – Mathématiques
A. TROESCH

Pour le jeudi 23 février 2006

Devoir Maison n° 13

Problème 1 – Où l'on retrouve un dénommé Tchebychev

Partie I – Polynômes de Tchebychev de première espèce

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = X \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme.
   Déterminer son degré de T_n, sa parité et son coefficient dominant, ainsi que les valeurs de $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (c) En utilisant la formule de Moivre puis la formule du binôme, exprimer $\cos n\theta$ comme un polynôme en $\cos\theta$, et en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ T_n = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k.$$
   (d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\theta \in]0,\pi[$, $T_n'(\cos(\theta))$. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0.$$
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en utilisant la question 1b, l'ensemble des racines de T_n appartenant à $[-1,1]$, puis toutes les racines de T_n.
   (b) En déduire la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)$.
3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k$.
   (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,n}$ et $a_{n,n-1}$.
   (b) En utilisant la question 1d, établir pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, une relation entre $a_{n,k}$ et $a_{n,k+2}$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression des coefficients de T_{2n} et de T_{2n+1}.

Partie II – Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = 2X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall\theta \in \mathbb{R},\ \ \sin\theta \cdot U_n(\cos\theta) = \sin((n+1)\theta)$.
3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre U_n et T_{n+1}'.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   (a) une expression des coefficients de U_n ;
   (b) une équation différentielle satisfaite par U_n.
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les racines de U_n.

Pafnouti Lvovitch Tchebychev : Okatovo (1821) – Saint-Pétersbourg (1894).

Problème 2 – Calcul de $\cos\dfrac{\pi}{17}$

Le but de ce problème est de déterminer $\cos\dfrac{\pi}{17}$ *à l'aide de radicaux carrés.*

On note dans tout le problème $a = \dfrac{\pi}{17}$.

Un conseil : posez soigneusement vos calculs, et n'essayez pas d'aller trop vite...

1. Soit $b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\cos(b) + \cos(b+h) + \cdots + \cos(b+(n-1)h) = \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(b+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

2. *On définit deux réels* x *et* y *par :*

$$\begin{cases} x = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 11a \\ y = \cos a + \cos 9a + \cos 13a + \cos 15a. \end{cases}$$

   (a) Montrer que $x + y = -\frac{1}{2}$.

   (b) Montrer que $xy = -2(\cos a - \cos 2a + \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a - \cos 6a + \cos 7a - \cos 8a)$.
   On pourra utiliser une formule pour le produit de cosinus, et se souvenir de la valeur de a *et des symétries du cosinus ; armez-vous également de patience.*

   (c) En déduire que $xy = -1$.

   (d) En déduire un polynôme du second degré dont x et y sont les racines.

   (e) Justifier que $x \geqslant y$ (on pourra se souvenir de la valeur de a).

   (f) En déduire des expressions de x et y.

3. *On définit quatre réels* z, t, u *et* v *par :*

$$\begin{cases} z = \cos 3a + \cos 5a \\ t = \cos 7a + \cos 11a \\ u = \cos a + \cos 9a \\ v = \cos 13a + \cos 15a \end{cases}$$

   (a) Montrer que $zt = -\frac{1}{4}$ et $uv = -\frac{1}{4}$.

   (b) En déduire des polynômes du second degré dont z et t d'une part, et u et v d'autre part sont racines.

   (c) En déduire les valeurs de z, t, u et v.

4. (a) Déterminer $\cos a \cos 9a$.

   (b) En déduire que :

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17-\sqrt{17}}}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{17}} + 4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}.$$

Il existe très peu de valeurs n *pour lesquelles on peut calculer* $\cos\frac{\pi}{n}$ *avec des radicaux. Euler a montré que les seules valeurs de* n *pour lesquelles il existe une telle expression avec radicaux sont les nombres premiers de la forme* $2^{2^n}+1$ *(appelés nombres de Fermat) et les produits de tels nombres. Autrement dit, les deux plus petites valeurs premières de* n *après 17 pour lesquelles une telle expression existe sont 257 et 65537. La méthode ci-dessus s'adapte théoriquement au calcul de* $\cos\frac{\pi}{257}$ *et* $\cos\frac{\pi}{65537}$*, mais je vous laisse imaginer les réjouissances...*

Remarquez que, toujours d'après Euler, l'existence d'une expression avec radicaux de $\cos\frac{\pi}{n}$ *est équivalente à la constructibilité à la règle et au compas du polygone convexe régulier à* n *côtés. Par exemple, comme vous l'evez peut-être vu au lycée, le pentagone est constructible, mais également les polygones à 17 côtés, à 257 côtés (théoriquement !) et à 65537 côtés... En revanche, l'heptagone ou le polygone à 11 cotés ne sont pas constructibles à la règle et au compas.*

À titre anectodique, la tombe d'Euler est ornée d'un polygône régulier à 17 côtés.

Leonhard Euler : Bâle (1707) – Saint-Pétersbourg (1783).