

Devoir Maison n° 14

Problème 1 – Où l'on retrouve un dénommé Tchebychev

Partie I – Polynômes de Tchebychev de première espèce

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme.
Déterminer son degré de T_n , sa parité et son coefficient dominant, ainsi que les valeurs de $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
- (c) En utilisant la formule de Moivre puis la formule du binôme, exprimer $\cos n\theta$ comme un polynôme en $\cos \theta$, et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k.$$

- (d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\theta \in]0, \pi[$, $T'_n(\cos(\theta))$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 - X^2)T''_n - XT'_n + n^2 T_n = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en utilisant la question 1b, l'ensemble des racines de T_n appartenant à $[-1, 1]$, puis toutes les racines de T_n .

En déduire la décomposition de T_n en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k$.
 - (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,n}$ et $a_{n,n-1}$.
 - (b) En utilisant la question 1d, établir pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, une relation entre $a_{n,k}$ et $a_{n,k+2}$.
 - (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression des coefficients de T_{2n} et de T_{2n+1} .

Partie II – Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 2X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \cdot U_n(\cos \theta) = \sin((n+1)\theta)$.
3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre U_n et T'_{n+1} .
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 - (a) une expression des coefficients de U_n ;
 - (b) une équation différentielle satisfaite par U_n .
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les racines de U_n .

Problème 2 – Calcul de $\cos \frac{\pi}{17}$

Le but de ce problème est de déterminer $\cos \frac{\pi}{17}$ à l'aide de radicaux carrés.

On note dans tout le problème $a = \frac{\pi}{17}$.

Un conseil : posez soigneusement vos calculs, et n'essayez pas d'aller trop vite...

1. Soit $b \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\cos(b) + \cos(b+h) + \cdots + \cos(b+(n-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos(b + (n-1)\frac{h}{2})}{\sin \frac{h}{2}}.$$

2. On définit deux réels x et y par :

$$\begin{cases} x = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 11a \\ y = \cos a + \cos 9a + \cos 13a + \cos 15a. \end{cases}$$

- (a) Montrer que $x + y = \frac{1}{2}$.

- (b) Montrer que $xy = -2(\cos a - \cos 2a + \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a - \cos 6a + \cos 7a - \cos 8a)$.

On pourra utiliser une formule pour le produit de cosinus, et se souvenir de la valeur de a et des symétries du cosinus ; armez-vous également de patience.

- (c) En déduire que $xy = -1$.

- (d) En déduire un polynôme du second degré dont x et y sont les racines.

- (e) Justifier que $x \geq y$ (on pourra se souvenir de la valeur de a).

- (f) En déduire des expressions de x et y .

3. On définit quatre réels z , t , u et v par :

$$\begin{cases} z = \cos 3a + \cos 5a \\ t = \cos 7a + \cos 11a \\ u = \cos a + \cos 13a \\ v = \cos 9a + \cos 15a \end{cases}$$

- (a) Montrer que $zt = -\frac{1}{4}$ et $uv = -\frac{1}{4}$.

- (b) En déduire des polynômes du second degré dont z et t d'une part, et u et v d'autre part sont racines.

- (c) En déduire les valeurs de z , t , u et v .

4. (a) Déterminer $\cos a \cos 13a$.

- (b) En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1 - \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1 - \sqrt{17}}{\sqrt{2}} \sqrt{17 - \sqrt{17} + 4\sqrt{2}} \sqrt{17 + \sqrt{17}}}.$$