

Devoir Maison n° 16 – Applications linéaires, matrices

Exercice – Soit $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}^2$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et de dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.

Soit T l'application de $\mathcal{C}^0$ dans l'ensemble de toutes les fonctions qui à $f \in \mathcal{C}^0$ associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T(f))(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt.$$

1. (a) Justifier que $\mathcal{C}^0$ est un espace vectoriel, et que $\mathcal{C}^2$ en est un sous-espace vectoriel.
(b) Justifier que T est à valeurs dans $\mathcal{C}^2$.
(c) Justifier que T est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^2)$.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $T(f) + (T(f))'' = f$. En déduire le noyau de T .
3. Soit $K = \{g \in \mathcal{C}^2 \mid g(0) = g'(0) = 0\}$.
(a) Montrer que K est un sev de $\mathcal{C}^2$.
(b) Montrer que l'image de T est incluse dans K .
(c) Soit $g \in K$. Calculer $T(g + g'')$. En déduire l'image de T .
4. (a) Montrer que T est un isomorphisme de $\mathcal{C}^0$ sur K .
(b) Montrer que pour tout $g \in K$, $T^{-1}(g) = g + g''$.
5. (a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = \sin x$. Calculer $T(s)$.
(b) Déterminer une fonction $f \in \mathcal{C}^2$ telle que $f'' + f = s$.

Problème – Étude de séries de matrices

L'objet de ce problème est d'étudier certaines séries de matrices $\sum A_n$ où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrice. On s'intéresse notamment aux séries exponentielles, logarithmiques et géométriques

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (matrice carrée de taille n). On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, la suite numérique des coefficients en position (i, j) des matrices A_n converge vers le coefficient en position (i, j) de A (convergence coefficient par coefficient). La série $\sum A_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge, ce qui équivaut à dire que les séries convergent coefficient par coefficient.

On admettra dans tout le problème que : $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

On définit, pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle les séries convergent :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad \text{et} \quad \ln(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (A - I_p)^n}{n}.$$

On se propose d'étudier ces deux séries, ainsi que la série géométrique, sur deux exemples explicites.

Partie I – Premier exemple

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Dans cette question, $p = 4$ et $a = 1$.
 - (a) Calculer explicitement A^0, A^1, A^2, A^3, A^4 puis A^n pour tout $n > 4$.
 - (b) En déduire l'existence et l'expression de $\exp(A)$.
 - (c) Déterminer $\exp(-A)$.
 - (d) Calculer le produit $\exp(A) \cdot \exp(-A)$. Cela vous étonne-t-il ?
 - (e) On note $C = \exp(A) - I_4$. Calculer C^2, C^3, C^4 puis C^n pour tout $n > 4$.
 - (f) En déduire l'existence et la valeur de $\ln(\exp(A))$. Ce résultat est-il étonnant ?
2. On revient au cas général.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq p$, $A^n = 0$, et exprimer A^n pour $n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$
 - (b) En déduire l'existence de $\exp(A)$, ainsi que son expression sous forme d'une somme finie de puissances de A . On essaiera ensuite de représenter le résultat sous forme matricielle.
 - (c) Calculer de même $\exp(-A)$, puis justifiez que $\exp(-A)$ est l'inverse de $\exp(A)$.
3. On considère à nouveau $p = 4$ et $a = 1$.
 - (a) Montrer que $I_4 - A$ est inversible et calculer son inverse.
 - (b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ et comparer au résultat de la question précédente. Cela vous étonne-t-il ?
4. On revient au cas général.
 - (a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ converge et calculer sa somme.
 - (b) En déduire $(I_p - A)^{-1}$.

Partie II – Deuxième exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.
 - (a) Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1} .
 - (b) Justifier que $A = PDP^{-1}$.
 - (c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n .
 - (d) En déduire l'existence et l'expression de $\exp(D)$.
 - (e) Montrer que $\exp(A)$ existe et que $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$.
 - (f) En déduire que $\exp(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-2} + e^{-1} & 2e^{-2} - 2e^{-1} \\ e^{-2} - e^{-1} & e^{-2} + 2e^{-2} \end{pmatrix}$.
2.
 - (a) Calculer de la même façon $\exp(-A)$.
 - (b) Calculer le produit $\exp(A) \cdot \exp(-A)$. Conclusion ?
3. On note $B = \exp(A)$. Notre but est de déterminer $\ln(B) = \ln(\exp(A))$.
 - (a) Justifier qu'il existe une matrice diagonale D' que l'on déterminera telle que $B - I_2 = PD'P^{-1}$.
 - (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, D'^n .
 - (c) Justifier l'existence de $\ln(D' + I_2)$ et donner son expression.
 - (d) En déduire l'existence et la valeur de $\ln(B)$. Le résultat vous étonne-t-il ?