Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Avril 2006

Devoir Maison n° 18 – Diagonalisation

Exercice 1 – Trois enfants Alice, Bob et Carmen jouent avec une balle.

- Lorsque Alice a la balle, la probabilité qu'elle l'envoie à Bob est 0,75 et la probabilité qu'elle l'envoie à Carmen est 0,25.
- Lorsque Bob a la balle, il l'envoie à Alice avec une probabilité de 0,75 et à Carmen avec une probabilité de 0,25.
- Carmen envoie toujours la balle à Bob.

On désigne respectivement par A_n, B_n et C_n les probabilités pour qu'à l'issue du n-ième lancer, ce soit Alice, Bob ou Carmen qui ait la balle. A_0, B_0 et C_0 représente une probabilité initiale de possession de la balle. Par exemple, si on précise que Alice a initialement la balle, alors $A_0 = 1$, $B_0 = 0$ et $C_0 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 que l'on notera M, telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice M et les sous-espaces propres associés. On déterminera des bases de ces sous-espaces propres.
3. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P d'ordre 3 telles que $M = PDP^{-1}$. Expliciter P et P^{-1}.
4. En déduire la matrice M^n.
5. Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des probabilités A_n, B_n et C_n. Ces limites dépendent-elles de l'enfant qui avait la balle au début de jeu ?

Exercice 2 –

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

Si $a_0, \dots, a_{2n}$ sont $2n+1$ complexes, et $Q \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

Partie I – Diagonalisation de s

1. **Généralités sur s.**
   (a) Montrer que s est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{2n}[X]$.
   (b) Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}_{2n}[X]$.
2. **Diagonalisation dans le cas particulier $n = 1$**
   (a) Quelle est la matrice M de s dans ce cas particulier ?
   (b) Déterminer les valeurs propres de M.
   (c) Montrer que M est diagonalisable, et la diagonaliser.
   (d) Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$ constituée de vecteurs propres de s ; quelle est la matrice de s dans cette base ?
   (e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un endomorphisme t de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $t^k = s$. On exhibera un tel endomorphisme t (pas forcément unique) en donnant sa matrice dans la base canonique.

3. **Étude du cas général**

   (a) Montrer que $\text{Spec}(s) = \{-1, +1\}$ (on pourra considérer s^2)

   (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de s (on pourra résoudre un certain système linéaire, en donnant une base de l'espace de ses solutions)

   (c) En déduire que s est diagonalisable, et donner une base de vecteurs propres, ainsi que la matrice de s dans cette base.

   (d) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & 0 \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C})$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une matrice N telle que $M = N^k$. Donner k^{2n+1} matrices N différentes répondant à la question.

Exercice 3 – Recherche des racines carrées d'une matrice

Le but de cet exercice est de trouver les racines carrées d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire toutes *les matrices R telles que $R^2 = A$. On étudie deux exemples.*

1. **Exemple 1 :** $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Diagonaliser la matrice A. On explicitera notamment une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$. On rangera les valeurs propres par ordre croissant sur la diagonale de D.

   (b) Calculer P^{-1}.

   (c) Montrer que R est une racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

   (d) Soit S une racine carrée de D.

      i. Montrer que $DS = SD$.

      ii. En déduire que la matrice S est diagonale.

      iii. Donner toutes les racines carrées de R.

   (e) Donner toutes les racines carrées de A (on laissera le résultat sous forme d'un produit faisant intervenir P et P^{-1}

2. **Exemple 2 :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, et soit n sont indice de nilpotence, c'est-à-dire le seul entier tel que $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$.

      i. Justifier l'existence d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit une famille libre.

      ii. En déduire que $n \leqslant 3$.

   (b) Calculer A^2, A^3.

   (c) Soit R une racine carrée de A. Que vaut R^4 ? R^6 ? Conclusion ?

   (d) Soit plus généralement $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, d'indice de nilpotence n.

      i. Montrer que si $2n - 1 > p$, alors A n'admet pas de racine carrée.

      ii. Exhiber, pour toute valeur de $p \geqslant 3$, une matrice A nilpotente et admettant une racine carrée R (on pourra commencer par définir R). Ainsi, on ne peut pas se passer de la condition $2n + 1 > p$.