Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le Vendredi 12 mai 2006

Devoir Maison n^{o} 19
Continuité d'une série de fonctions
Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part

Partie I – Une limite non continue de fonctions continues

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement *vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*
Nous donnons un exemple montrant que si (f_n) converge simplement vers f, même si toutes les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues, la fonction limite f n'est pas forcément continue. Ainsi, la continuité n'est pas forcément préservée par passage à la limite.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $f_{x_0,n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{x_0,n}(x) = \mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{x_0,n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f_{x_0} que l'on déterminera.
3. f_{x_0} est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_m$ des réels deux à deux distincts. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n = f_{x_1,n} + \cdots + f_{x_m,n}.$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
5. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction qui n'est continue en aucun des points x_i, $i \in [\![1, m]\!]$.

Partie II – Un critère de continuité pour des séries de fonction

D'après la partie précédente, on ne peut pas conclure directement à la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues (et donc à la continuité d'une somme d'une série de fonctions continues). L'objet de cette partie est de donner un critère simple de continuité d'une limite de suite de fonctions ou d'une somme de série de fonctions.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in I,\ \forall n \geqslant N,\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi, contrairement au cas de la convergence simple, N est indépendant de x. On se donne une telle suite.

1. Montrer que la suite $(f_{x_0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie I n'est pas uniformément convergente.
2. Justifier qu'une suite uniformément convergente est simplement convergente.
3. Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

4. En déduire, en utilisant la définition par ε, que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, alors f est continue en tout $x \in I$.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ converge. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles converge uniformément. On dit que $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\sum a_n \text{ converge,} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |f_n(x)| \leqslant a_n.$$

Ainsi, les a_n sont des majorants des f_n, et $\sum a_n$ converge.

5. Montrer que si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément.

Partie III – La fonction de Weierstraß : une fonction partout continue nulle part dérivable

On étudie ici une fonction, obtenue comme limite d'une série de fonction. On montre que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. L'exemple qui suit a été donné par Weierstraß en 1861, et a été le premier exemple de fonction partout continue et nulle part dérivable. Gini a ensuite donné toute une famille de telles fonctions. Un autre exemple, plus constructif, a été donné par Bolzano.
Soit $b \in]0,1[$, et a un entier positif impair tel que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. On définit f par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x).$$

1. Justifier que pour tout $b \in]0,1[$, il existe au moins une valeur de a vérifiant les hypothèses voulues. Soit de telles valeurs
2. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (donc que la série est simplement convergente).
3. Justifier que la série définissant f est normalement convergente. En déduire que f est continue.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)) \qquad \text{et} \qquad R_m(h) = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)).$$

4. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}^*,\ |S_m(h)| \leqslant \pi\dfrac{(ab)^m}{ab-1}$.

Soit $\alpha_m = E(a^m x + \frac{1}{2})$, et $\beta_m = a^m x - \alpha_m$. On pose $h_m = \frac{1-\beta_m}{a^m}$.

5. Justifier que $-\frac{1}{2} \leqslant \beta_m \leqslant \frac{1}{2}$, puis que $|h_m| \leqslant \frac{3}{2a^m}$.
6. Soit n un entier supérieur ou égal à m.
   (a) Justifier que $a^{n-m}(\alpha_m + 1)$ est de même parité que $\alpha_m + 1$.
   (b) En déduire que $\cos(\pi a^n(x + h_m)) = (-1)^{\alpha_m+1}$.
   (c) Calculer de même $\cos(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ et $\sin(\pi a^{n-m}\alpha_m)$ en fonction de α_m.
   (d) En déduire que $\cos(a^n\pi x) = (-1)^{\alpha_m}\cos(\pi a^{n-m}\beta_m)$.
7. En déduire que $R_m(h_m) = \dfrac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} b^n(1 + \cos(\pi a^{n-m}\beta_m))$.
8. En déduire que $|R_m(h_m)| \geqslant \frac{b^m}{|h_m|}$, puis que $|R_m(h_m)| \geqslant \frac{\pi(ab)^m}{ab-1}$. (On se souviendra de l'hypothèse sur ab)
9. En déduire que : $\left|\dfrac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}\right| \geqslant \dfrac{2(ab)^m}{3} \cdot \dfrac{ab - \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)}{ab-1}$.
10. (a) Quelle est la limite de $\left|\dfrac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}\right|$ lorsque m tend vers $+\infty$?
    (b) Montrer que f n'est pas dérivable en x.

Le réel x ayant été choisi quelconque, la fonction f (appelée fonction de Weierstraß), n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$, alors qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Karl Weierstraß : Ostenfelde (1815) – Berlin (1897)