

Devoir Maison n° 22 – Calcul d'intégrales

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_n = \int_1^2 \ln^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$ (former une relation de récurrence).
2. $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$ (faire un changement de variable adéquat).
3. $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2-4)^2} \, dx$.
4. $I = \int_0^1 \frac{9x}{(x^2-4x+13)^2} \, dx$.
5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos^3 t + 4 \cos t} \, dt$.

Exercice 2 –

1. **Intégrales de Wallis.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

- (a) Calculer I_0 et I_1 .
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot I_{n-1}$.
- (c) En déduire que pour tout entier $p \geq 0$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- (d) Étudier le sens de variation de I_n et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}$.
- (e) En déduire la limite de $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, puis la formule de Wallis :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{p} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

2. **Formule de Stirling.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$.

- (a) Soit $u_n = S_n - S_{n-1}$. Montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
(On pourra utiliser un développement limité du logarithme)
- (b) En déduire que S_n admet une limite finie S dans $\mathbb{R}$.
- (c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$. En calculant de deux manières la limite de $\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{2n}}$, déterminer la valeur de S .
- (d) En déduire la formule de Stirling : $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1))$.