LYCÉE CARNOT
ECS 4 – Mathématiques
A. TROESCH

Pour le mardi 4 octobre 2005

Devoir Maison n° 3 – Dénombrement de permutations de type cyclique donné

L'objet de ce problème est de déterminer le cardinal de certaines classes de permutations. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = [\![1, n]\!]$, et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de n. Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un entier $k \in \mathbb{N}$, σ^k désigne la permutation obtenue en composant k fois σ par lui-même. Par convention, σ^0 désigne alors l'identité.

Partie I – Type cyclique d'une permutation

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cette partie, on note simplement E pour E_n.

1. Définition du type cyclique.
   (a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $m \in E$. Montrer qu'il existe k et ℓ dans $\mathbb{N}$, $k < \ell$, tels que $\sigma^k(m) = \sigma^\ell(m)$.
   (b) Montrer qu'il existe k' tel $m = \sigma^{k'}(m)$.
   (c) Soit $\operatorname{ord}(m)$ (ordre de m) le plus petit entier non nul k' tel que $\sigma^{k'}(m) = 0$.
      i. Justifier l'existence de $\operatorname{ord}(m)$.
      ii. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k(m)$ est d'ordre $\operatorname{ord}(m)$.
   (d) Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, on note $C_m = \{\sigma^k(m),\ k \in \mathbb{N}.\}$. (orbite de m)
      i. Quel est le cardinal de C_m ?
      ii. Quel caractérisation en terme de cardinal de C_m pouvez-vous donner d'un point fixe m (c'est-à-dire vérifiant $f(m) = m$) ?
      iii. Soit $(m, m') \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que soit $C_m \cap C_{m'} = \varnothing$, soit $C_m = C_{m'}$.
      iv. Montrer que $\{C_m,\ m \in [\![1, n]\!]\}$ est une partition de $[\![1, n]\!]$ (on ne compte bien sûr qu'une fois deux ensembles égaux C_m et $C_{m'}$)

   On désignera cette partition par « partition associée à σ ». Une permutation est appelée un cycle *si une seule des parts de la partition qui lui est associée est de cardinal strictement plus grand que* 1*. La longueur d'un cycle est le cardinal de cette part.*

   Le support d'une permutation σ, noté $\operatorname{Supp}(\sigma)$*, est l'union des parts de la partition associée à σ dont la taille est strictement plus grande que* 1*. Par exemple, le support d'un cycle est la seule part de cardinal strictement plus grand que* 1*. On dit que deux permuations σ et σ' sont à supports disjoints si* $\operatorname{Supp}(\sigma) \cap \operatorname{Supp}(\sigma') = \varnothing$.

2. Composition.
   (a) Soit σ et σ' deux permutations à supports disjoints. Montrer que $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.
   (b) Décrire la partition associée à $\sigma \circ \sigma'$ en fonction des partitions associées à σ et σ'.

   Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et $m \in [\![1, n]\!]$. On note σ_m la permutation définie par :

$$\sigma_m(p) = \begin{cases} \sigma(p) & si\ p \in C_m \\ p & si\ p \notin C_m \end{cases}$$

   (c) Justifiez que σ_m est un cycle
   (d) Soit $\{C_{m_1}, \dots, C_{m_k}\}$ le support cyclique de σ (dans chaque orbite, on a choisi un élément m_i). Montrer que $\sigma = \sigma_{m_1} \circ \cdots \circ \sigma_{m_k}$, et que cette composition peut être prise dans n'importe quel ordre.

3. Classes de conjugaison.

   On définit une relation $\mathcal{R}$ sur les permuations de la manière suivante : $\sigma \mathcal{R} \sigma'$ (on dit : « σ et σ' sont conjugués ») s'il existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$.

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (attention : notion hors-programme)

   Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées classes de conjugaison.

   Une partition de l'entier n est une suite $0 < n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$ telle que $n_1 + \cdots + n_k = n$. L'entier k est appelé longueur de la partition.

   À une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est naturellement associée une partition de l'entier n, obtenue en considérant la suite (réordonnée de manière convenable) des cardinaux des parts de la partition.

   Le type cyclique *d'une partition σ est la partition de l'entier n naturellement associée à la partition de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ associée à σ.*

   (b) Montrer que si $\sigma \mathcal{R} \sigma'$ et si σ est un cycle de longueur k, alors σ' est un cycle de longueur k.

   (c) Montrer que si α et β sont à supports disjoints, alors $\tau^{-1} \circ \alpha \circ \tau$ et $\tau^{-1} \circ \beta \circ \tau$ sont aussi à support disjoint.

   (d) En déduire que si σ et σ' sont conjuguées, alors elles ont même type cyclique.

   (e) Réciproquement, montrer que si σ et σ' ont même type cyclique, alors σ et σ' sont conjuguées.

   Ainsi, les classes de conjugaison sont les ensembles de permutation de même type cyclique. Pour cette raison, il est intéressant de savoir calculer le nombre de permutations de type cyclique donné.

Partie II – Nombre de permutations de type cyclique donné

1. Premier exemple : un cycle.

   Soit σ un cycle de longueur k.

   (a) Montrer que le type cyclique de σ est constitué uniquement de parts de taille 1 et k, en nombre qu'on précisera.

   (b) Montrer que tout cycle de longueur k est entièrement déterminé par le choix de son support, et d'un ordre sur les éléments de ce support.

   (c) Montrer que pour tout cycle σ, il y a exactement k façons différentes de déterminer σ par le choix du support et d'un ordre sur le support.

   (d) En déduire que le nombre de cycles de longueur k est $\dfrac{n!}{k \cdot (n-k)!}$.

2. Deuxième exemple : involutions.

   On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une involution si $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

   (a) Justifier que les seules parts du type cyclique d'une involution σ sont 1 et 2.

   (b) Caractériser précisément le type cyclique d'une involution à k points fixes (c'est-à-dire, donnez le nombre de parts égales à 1, le nombre de parts égales à 2).

   (c) Justifiez qu'une involution à k points fixes est déterminée de façon unique par le choix de $\frac{1}{2}(n-k)$ sous-ensembles à 2 éléments de $[\![1, n]\!]$, l'ordre de ces choix important peu.

   (d) En déduire que le nombre d'involutions à k points fixes de $[\![1, n]\!]$ est 0 si $n-k$ n'est pas pair, et $\dfrac{n!}{2^{\frac{n-k}{2}} \left(\frac{n-k}{2}\right)! k!}$ si $n-k$ est pair.

   (e) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n le nombre d'involutions de E_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2n}{2k} \\ T_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{2n+1}{2k}. \end{cases}$$

(f) Une autre façon de démontrer cette formule.

i. En triant les involutions de E_n suivant que n en est un point fixe ou non, montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}.$$

ii. Retrouver l'expression de la question précédente pour T_{2n} et T_{2n+1}.

3. Cas général.

On se donne un type cyclique T :$0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$ tel que $n_1 + \cdots + n_k = n$. Une telle partition de n est entièrement constituée de parts de taille comprise entre 1 et n. Pour $\ell \in [\![1, n]\!]$, on note $p_\ell(T)$ le nombre de parts de taille ℓ dans la partition T ; ce nombre vaut 0 si ℓ n'est pas une part de T.

(a) Montrer que le nombre de permutations de type cyclique T est :

$$\frac{n!}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} \ell^{p_\ell(T)}(p_\ell(T))!}$$

(b) Montrer que cette formule est conforme aux résultats trouvés dans les questions 1 et 2.

Partie III – Étude des dérangements de $\{1, \ldots, N\}$

Cette partie est indépendante des autres, et étudie plus généralement le nombre de permutations (et non seulement d'involutions) ayant un nombre donné de points fixes.

Soit s une permutation de E_N. Pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant N$, on note $F(N,p)$ le nombre de permutations de E_N qui ont exactement p points fixes. On convient que $F(0,0) = 1$.

1. (a) Montrer que $F(N,N) = 1$ et $F(N, N-1) = 0$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} F(N,k) = N!$

2. *On pose $\omega_N = F(N,0)$. Ainsi, ω_N est le nombre de permutations de E_N qui n'ont aucun point fixe. Une telle permutation est appelée un* dérangement *de $\{1, \ldots, N\}$. On convient que $\omega_0 = 1$.*

   (a) Montrer que, pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant N$: $F(N,k) = \dbinom{N}{k}\omega_{N-k}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!} = 1$.

   (c) En raisonnant par récurrence, établir la relation : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   (d) Déterminer la limite de $\dfrac{\omega_N}{N!}$ lorsque N tend vers $+\infty$. On admettra que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$ est égale à e^x.