

Devoir Maison n° 4 – Suites

Exercice 1 – On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$, et la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 0$ et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+2} = g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.
2. Étudier le sens de variation de $g \circ f$ sur son domaine de définition.
3. En déduire que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer son sens de variation.
4. Montrer que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie, et déterminer cette limite ℓ .
5. Vérifier que ℓ est un point fixe de f et de g .
6. Exprimer $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$, f et g . En déduire que ces trois suites convergent vers des limites que l'on déterminera. Préciser l'éventuelle monotonie de ces suites.
7. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 2 – Dans tout l'exercice, tous les entiers considérés sont supérieurs ou égaux à 3.

Soit f_n l'application définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq n$.
(b) En déduire un encadrement de β_n et sa limite ℓ .
(c) Justifier que $n \ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, et en déduire un équivalent de $\ln(\beta_n)$, puis l'équivalent suivant :
$$\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 3 – (Bolzano-Weierstrass) Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Bolzano-Weierstrass, affirmant que de toute suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut extraire une suite convergente. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Première démonstration.

- (a) Justifier qu'il existe des réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a, b]$.
- (b) Justifier que l'un au moins des deux ensembles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) Montrer qu'il existe deux suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
i. $\{p \in \mathbb{N} \mid u_p \in [a_n, b_n]\}$ est infini ;
ii. $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$.
- (d) En déduire l'existence d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

2. **Deuxième démonstration.** On définit la limite supérieure et la limite inférieure de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\limsup u_n = \inf \{ \lambda \text{ tels que l'ensemble } \{n \mid x_n > \lambda\} \text{ est fini} \},$$

$$\liminf u_n = \sup \{ \lambda \text{ tels que l'ensemble } \{n \mid x_n < \lambda\} \text{ est fini} \}.$$

(a) Justifier l'existence de la limite supérieure et de la limite inférieure de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la limite supérieure est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On admettra le résultat similaire pour la limite inférieure.

(c) En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.

3. **La propriété de Borel-Lebesgue.** Soit (E, d) un espace métrique, et F un sous-ensemble de E .

On dit que F est compact s'il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite à valeurs dans F , on peut extraire une suite convergente vers une limite dans F . Les questions précédentes montrent par exemple que les intervalles fermés et bornés $[a, b]$ sont des compacts de $\mathbb{R}$. Il n'est pas difficile de montrer que ce sont les seuls compacts.

On appelle recouvrement de F par des ouverts la donnée d'une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E tels que $\bigcup_{i \in I} U_i = F$ (les U_i ne sont pas forcément disjoints). On dit que le recouvrement est fini si I est fini.

On dit que F vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si de tout recouvrement de F par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini de F .

Le but de cette question est de montrer qu'un ensemble F vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue est compact. On pourrait montrer que la réciproque est vraie (mais c'est plus délicat). Ainsi, la propriété de Borel-Lebesgue et la propriété de Bolzano-Weierstrass sont équivalentes, et définissent toutes deux les compacts.

Soit F un sous-ensemble de E vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F .

(a) Justifier que si x n'est pas valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon_x)$ contient un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) En raisonnant par l'absurde et en écrivant F comme une union de boules ouvertes $B(x, \varepsilon_x)$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. Conclure.

Exercice 4 – (Suites de Cauchy)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N, |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente de $\mathbb{R}$ est de Cauchy.

2. On veut montrer la réciproque. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{u_p \mid p \geq n\}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est majoré. En déduire l'existence de sa borne supérieure M_n .

(b) Justifier que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée ; justifier l'existence de sa limite ℓ .

(c) En utilisant la définition de la convergence, et en majorant convenablement $|u_n - \ell|$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Remarque : les espaces métriques dans lesquels les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes sont appelés espaces complets. On vient de montrer que $\mathbb{R}$ est complet. On peut se convaincre assez facilement que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Voilà encore une façon (probablement la plus répandue) de construire $\mathbb{R}$, comme l'ensemble des limites des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. Cette construction s'appelle « compléter $\mathbb{Q}$ ».