Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le jeudi 3 novembre 2005

Devoir Maison n° 5 – Séries numériques

Problème 1 – Étude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum\limits_{n \geqslant n_0} a_n$ une série convergente. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, son reste de rang n : $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but du problème est d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} r_n$, dans trois exemples différents.

Exemple 1

1. *On pose, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.*

   Calculer r_n, puis montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

Exemple 2

2. *On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.*
   (a) Quelle est la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ (on rappellera le nom de cette série, et on ne refera pas la preuve).
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a :
   $$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^2}.$$
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   (d) Donner un équivalent simple de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ au voisinage de $+\infty$.
   (e) Quelle est la nature de $\sum r_n$?

Exemple 3

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On note pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$.

3. En considérant les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, déterminer la nature de la série $\sum a_n$.
4. Expression intégrale de r_n.

   On définit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

   Indication : on pourra calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.
   (c) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n.
5. Conclusion
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a : $I_n = \dfrac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$,

   où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum r_n$.

Problème 2 – Quelques règles pour l'étude de la semi-convergence

1. **Cas des séries alternées**

   (a) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante de limite nulle.*

   On note, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

   En étudiant $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

   (b) Étudier la convergence des séries suivantes (on précisera les cas de semi-convergence) :

$$\sum(-1)^n \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right); \qquad \sum\frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}; \qquad \sum\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. **Règle d'Abel** *On appelle suite de Cauchy une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \geqslant N,\ |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

   On admet le résultat suivant (cf DM 4) : une suite réelle ou complexe est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

   Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On note, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$, et $T_n = \sum_{k=0}^{n} b_n$.

   On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante de limite nulle, et que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On se propose de montrer que dans ce cas, $\sum a_n b_n$ converge (règle d'Abel).

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \geqslant n$,

$$S_p - S_n = \sum_{k=n+1}^{p-1}(a_k - a_{k+1})T_k + a_p T_p - a_{n+1}T_n.$$

   (b) Soit M un majorant de $(|T_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant n$, $|S_p - S_n| \leqslant 2Ma_p$.

   (c) En déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

   (d) Exemple 1 : montrer que la règle de convergence des séries alternées (question 1) est un cas particulier de la règle d'Abel.

   (e) Exemple 2 :

      i. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante de limite nulle, et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$.
      Montrer que la série complexe $\sum a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta n}$ est convergente.

      ii. Étudier la convergence des séries : $\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; $\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)$.
      On précisera les cas de semi-convergence.

      iii. Étudier suivant la valeur de $z \in \mathbb{C}$ la convergence de la série : $\sum \frac{z^n}{2^n \ln n}$.

   (f) Exemple 3 :

      i. Sous les mêmes conditions sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et θ, montrer que $\sum a_n\cos(\theta n)$ et $\sum a_n\sin(\theta n)$ convergent.

      ii. Montrer que la série $\sum \frac{\sin n}{n}$ est convergente.

      iii. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\sin^2 n}{n}$
      Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \{3i+1, 3i+2, 3i+3\}$ tel que $\sin^2 n \geqslant \frac{1}{2}$.

      iv. En déduire que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{3i+1} + u_{3i+2} + u_{3i+3} \geqslant \dfrac{1}{2(3i+3)}$.

      v. En déduire que $\sum u_n$ diverge, puis que $\sum \frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.

Exercice – Étudier la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum\frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n - 1)}; \qquad b)\ \sum\frac{n!}{n^n}; \qquad c)\ \sum(\ln\cos\frac{1}{n})(\ln\sin\frac{1}{n}); \qquad d)\ \sum n^{\frac{1}{n}} - 1.$$