Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Pour le jeudi 10 novembre 2005

Devoir Maison n° 6 – Autour des séries génératrices

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réelle. On appelle fonction (ou série) génératrice G de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction définie par $G(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n x^n$, pour toute valeur de $x\in\mathbb{R}$ telle que la série converge.

Le but de ce problème est de donner quelques propriétés élémentaires et quelques règles de manipulation des séries génératrices, et de montrer sur des exemples concrets comment elles peuvent servir à résoudre certains problèmes calculatoires.

On admet dans tout le problème que pour tout $a\in\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<1$,

$$(1+x)^a = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(a-i)\right)\frac{x^n}{n!}. \qquad (1)$$

Questions préliminaires

1. *On suppose que $a\in\mathbb{N}$.*
   Montrer que la série de l'équation (1) est un polynôme (la somme est finie).
   Pour quelles valeurs de x est-elle convergente ?
   Quelle formule reconnaissez-vous ?
2. *On suppose que $a\notin\mathbb{N}$.*
   Montrer que la série de l'équation (1) est absolument convergente si $x<1$ et grossièrement divergente si $x>1$ (on pourra comparer, à partir d'un certain rang, le terme général avec une suite géométrique).
3. *On suppose que $a=-1$.*
   (a) Expliciter la formule obtenue par l'équation (1). Que reconnaissez-vous ?
   (b) La série est-elle convergente pour $x=1$? $x=-1$?
4. *On suppose que $a=\frac{1}{2}$.*
   Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<1$: $\sqrt{1-x}=1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Gamma_{n-1}\frac{x^n}{4^n}$,
   où pour tout $n\in\mathbb{N}$, Γ_n est le n-ième nombre de Catalan, défini par $\Gamma_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

PARTIE I – Propriétés élémentaires des séries génératrices.

1. **Convergence**
   Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, et G sa série génératrice. Soit $E=\{x\in\mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (|g_nx^n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est non bornée }\}$. Si l'ensemble E est non vide, on note R sa borne inférieur. S'il est vide, on pose $R=+\infty$.
   (a) Soit $|x|>R$. Montrer que la série définissant $G(x)$ est divergente. Comment qualifier cette divergence ?
   (b) Soit $|x|<R$. Montrer que la série définissant $G(x)$ est absolument convergente. (On pourra comparer son terme général au terme général d'une série géométrique de raison $\frac{x}{r}$, où $x<r<R$.)

   R est appelé rayon de convergence de la série G. Pour déterminer R on étudie la convergence de $G(x)$ selon la valeur de x.

   (a) Quel est le rayon de convergence de la série de l'équation (1) ?
   (b) Quel est le rayon de convergence de la série génératrice de la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$? de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. **Étude de la convergence en R et $-R$**
   On veut montrer par des exemples que tous les cas de figure sont possibles.
   (a) Déterminer R et étudier la convergence en R et $-R$ de la série génératrice de la suite $\left(\frac{1}{n^2(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La convergence est-elle absolue ?
   (b) Déterminer R et étudier la convergence en R et $-R$ de la série génératrice de la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déterminer R et étudier la convergence en R et $-R$ de la série génératrice de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. **Continuité en 0**
   Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de série génératrice G, dont le rayon de convergence est $R>0$. Soit r tel que $0<r<R$.
   (a) Montrer qu'il existe M tel que pour tout $x\in[0,r[$, $|g_n x^n| \leqslant M\left(\frac{x}{r}\right)^n$
   (b) En majorant $|G(x)-g_0|$ par une fonction de limite nulle en 0, montrer que G est continue en 0.
5. **Unicité**
   Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de séries génératrices G et H. On cherche dans cette question à montrer que s'il existe $r>0$ tel que G et H sont définis sur $[0,r[$ et vérifient : $\forall x\in[0,r[,\ G(x)=H(x)$, alors les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.
   On raisonne pour cela par l'absurde. On suppose que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas égales. Il existe donc un plus petit indice n_0 tel que $g_{n_0}\neq h_{n_0}$.
   (a) Quelle est la limite de $\dfrac{G(x)-g_0-\cdots-g_{n_0-1}x^{n_0-1}}{x^{n_0}}$ lorsque x tend vers 0^+ ?
   (b) En déduire une contradiction.

PARTIE II – Fonctions génératrices et récurrences.

1. **Suite de Fibonacci.** *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $f_0=0$, $f_1=1$, et pour tout $n\geqslant 2$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$. On note F la série génératrice de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (a) Montrer que le rayon de convergence R de F est non nul.
   (b) Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$, $(1-x-x^2)F(x)=x$.
   (c) Soit φ_1 et φ_2 les deux racines du polynôme $1-x-x^2$. Calculer φ_1 et φ_2. Calculer λ_1 et λ_2 tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{\varphi_1,\varphi_2\}$,
   $$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{\lambda_1}{x-\varphi_1}+\frac{\lambda_2}{x-\varphi_2}. \tag{2}$$
   (d) En utilisant la relation (1) et les questions préliminaires, en déduire une expression de F à l'aide d'une série. Déterminer le domaine de convergence de cette série.
   (e) En déduire une expression explicite de f_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   Ce principe permet d'expliciter toutes les suites définies par une récurrence linéaire, à condition de connaître les racines du polynôme caractéristique.
2. **Une récurrence non linéaire.** *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $g_0=g_1=1$ et pour tout $n\geqslant 2$, $g_n=g_{n-1}+2g_{n-2}+(-1)^n$. Soit G sa série génératrice.*
   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est entier.
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g_n\geqslant 1$.
   (c) Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n\leqslant 4g_{n-1}$.
   (e) En déduire que le rayon de convergence R de G est non nul ; plus exactement, on montrera que $R\geqslant\frac{1}{4}$.
   (f) Justifier que $R\leqslant 1$.

(g) Justifier que pour tout $x \in]-R, R[$, $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_{n-1}x^n + 2\sum_{n=2}^{+\infty} g_{n-2}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + x$.

(h) En déduire que pour tout $x \in]-R, R[$, $G(x) = \dfrac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2}$.

(i) Montrer qu'il existe des réels λ, μ et ν, que l'on déterminera, tels que pour tout $x \in]-R, R[$, $G(x) = \dfrac{\lambda}{1-2x} + \dfrac{\mu}{(1+x)} + \dfrac{\nu}{(1+x)^2}$.

(j) En déduire à l'aide de (1) une expression sous forme d'une série de G.

(k) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \dfrac{7}{9}2^n + \left(\dfrac{1}{3}n + \dfrac{2}{9}\right)(-1)^n$.

3. **Suites mutuellement récurrentes.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2}$, et $v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$. Soit U et V les fonctions génératrices de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = 0$ et $v_{2n} = 0$.

(c) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

(d) En déduire que les rayons de convergence R_1 et R_2 de U et V sont inférieurs ou égaux à 1.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3^n$ et $v_n \leqslant 3^n$.

(f) En déduire que $R_1 \geqslant \frac{1}{3}$ et $R_2 \geqslant \frac{1}{3}$.

(g) Soit $R = \min(R_1, R_2)$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$U(x) = 2xV(x) + x^2U(x) + 1 \qquad \text{et} \qquad V(x) = xU(x) + x^2V(x).$$

(h) En déduire des expressions sous forme de fraction rationnelle de U et V.

(i) Montrer qu'il existe des réels λ_1, μ_1, λ_2 et μ_2 tels que pour tout $x \in]-R, R[$:

$$U(x) = \frac{\lambda_1}{1-(2+\sqrt{3})x^2} + \frac{\mu_1}{1-(2-\sqrt{3})x^2} \qquad \text{et} \qquad V(x) = \frac{\lambda_2 x}{1-(2+\sqrt{3})x^2} + \frac{\mu_2 x}{1-(2-\sqrt{3})x^2}$$

(j) En déduire, à l'aide de (1) et des questions préliminaires, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{2n+1} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n \qquad \text{et} \qquad u_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

PARTIE III – Convolutions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

On note U, V et W les séries génératrices de ces trois suites. On désigne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n(x))$ les sommes partielles de $U(x)$, $V(x)$ et $W(x)$. Soit R le minimum des deux rayons de convergence de U et V

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites positives.

(a) Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ou infinie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0, R[$,

$$U_n(x)V_n(x) \leqslant W_{2n}(x) \leqslant U_{2n}(x)V_{2n}(x).$$

(b) En déduire que $W(x)$ est définie pour tout $x \in [0, R[$, que le rayon de convergence de la série W est au moins égal à R, et que pour tout $x \in [0, R[$, $W(x) = U(x)V(x)$.

2. **Exemple 1 : une convolution de Fibonacci.**
On reprend les notations de II-1. On désigne par R le rayon de convergence de la série génératrice de la suite de Fibonacci.

   (a) En élevant (2) au carré et en utilisant (1) avec $a = 2$, montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$F(x)^2 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varphi_1^n x^n - \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}x^n + \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varphi_2^n x^n.$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1^n + \varphi_2^n = 2F_{n+1} - F_n$, et en déduire une expression de $F(x)^2$ comme une série dont le terme général est donné uniquement en fonction de x, n et de termes de la suite de Fibonacci.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k f_{n-k} = \frac{2nf_{n+1} - (n+1)f_n}{5}$.

3. **Exemple 2 : une convolution de Catalan.** *On définit une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence suivante : $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}.$$

On note C la série génératrice de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le but de cette question est de donner une preuve complètement analytique du fait que cette récurrence définit les nombres de Catalan $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Rappelons que l'on a déjà donné une preuve combinatoire de cette formule dans le DS 1, en comptant les arbres binaires. Remarquons que connaître ce résultat de manière purement analytique permet de compter directement les arbres binaires, ou les chemins de Dyck, sans autre raisonnement combinatoire (je renvoie au DS 1).

   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par cette relation de récurrence.

   (b) *Soit R le rayon de convergence de C. On suppose ici que $R > 0$.*
   Montrer qu'alors pour tout $x \in]-R, R[$, $C(x) = xC(x)^2 + 1$, puis que $C(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

   (c) En déduire, toujours sous l'hypothèse que $R > 0$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \Gamma_n$.
   Ainsi, on a trouvé une expression possible pour c_n ; comme on a posé une condition $R > 0$ sans la vérifier, on ne peut pas conclure directement. Réciproquement, on vérifie dans les questions suivantes que les nombres de Catalan vérifient la relation de récurrence. Comme cette relation définit une unique suite, on en déduira que $c_n = \Gamma_n$.

   (d) *Soit G la série génératrice de la suite de Catalan $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   Déterminer le rayon de convergence R' de G.

   (e) Justifier que pour tout $x \in]-R', R'[$, $G(x) = xG(x)^2 + 1$.

   (f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_k \Gamma_{n-1-k}$, puis que $\Gamma_n = c_n$.