

Devoir Surveillé n° 1 – Combinatoire

EXERCICE – Sommes alternées de coefficients binomiaux

Le but de cet exercice est de démontrer de trois manières différentes l'identité suivante, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

On rappelle que par convention, $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$.

1. Démonstration par récurrence double

- Justifier que la formule (1) est vraie si $n < m$, et si $n = m$.
- En raisonnant par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, puis sur $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'elle est vraie pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

2. Démonstration par la formule du multinôme

- Soit x, y et z trois réels, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(x + y + z)^n = \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m} z^{n-k}$.
(On pourra appliquer deux fois la formule du binôme)
- En choisissant des valeurs judicieuses pour y et z , et en comparant le coefficient de x^m du polynôme en x ainsi obtenu, retrouver l'identité (1).

3. Démonstration combinatoire.

L'identité étant triviale pour $n \leq m$, on suppose que $n > m$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble constitué des paires d'ensembles (S, T) tels que $T \subset S \subset \{1, \dots, n\}$, et $|T| = m$. On désigne par $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des tels couples (S, T) tels que $|S|$ soit pair, et $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ des couples (S, T) tels que $|S|$ soit impair.

On construit une application $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de la manière suivante : soit $(S, T) \in \mathcal{F}$, et soit x le plus grand élément de $\{1, \dots, n\}$ qui ne soit pas dans T . On définit alors $S' = S \cup \{x\}$ si $x \notin S$, et $S' = S \setminus \{x\}$ si $x \in S$. L'application Φ est alors définie sur (S, T) par : $\Phi(S, T) = (S', T)$.

- Justifier l'existence de x .
 - Montrer que Φ est bien à valeurs dans $\mathcal{G}$, et que Φ est une bijection.
- En déduire une nouvelle fois l'identité (1).

PROBLÈME – Autour des nombres de Catalan

Dans tout le problème, si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris au sens large entre a et b .

Partie Préliminaire – Nombres de Catalan

On définit la suite des nombres de Catalan $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$.
- Justifier que $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation suivante : $\forall n \geq 1$, $(n+1)\Gamma_n = 2 \cdot (2n-1)\Gamma_{n-1}$.
- Soit $(\Gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la même relation de récurrence, et telle que $\Gamma'_0 = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n = \Gamma'_n$.

Partie I – Arbres binaires

Intuitivement, un arbre est la donnée d'une racine de laquelle partent différentes branches ; soit ces branches se subdivisent (il y a donc un nœud et de nouvelles branches qui en partent), soit elles se terminent par une feuille.

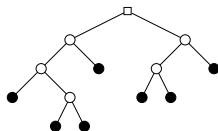


FIG. 1 – Exemple d'arbre binaire

On dit qu'un arbre est binaire si de chaque nœud (y compris la racine) partent exactement deux branches. On donne dans la figure 1 un exemple de telle construction (attention, les mathématiciens ont tendance à pendre les arbres par la racine, ce qui est plutôt inhabituel dans la nature)

On appelle « sommets » de l'arbre les nœuds (y compris la racine) et les feuilles. Sur l'exemple ci-dessus, les nœuds sont représentés par des ronds vides, les feuilles par des ronds pleins, et la racine par un carré.

On définit ci-dessous les arbres binaires de manière un peu plus rigoureuse, par récurrence sur leur taille.

On définit pour commencer le seul arbre binaire à 1 sommet comme étant constitué d'un seul sommet (sa racine) S . Ce sommet est une feuille, puisqu'il n'en part aucune branche.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on ait construit les arbres à k sommets pour toute valeur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Un arbre binaire à $n + 1$ sommets A est la donnée d'un triplet (S, A_1, A_2) , où S est un sommet (la racine de A), et A_1 et A_2 des arbres binaires à respectivement k et $n - k$ sommets, pour une certaine valeur de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les sommets de A sont S , et les sommets de chacun des arbres A_1 et A_2 .

La représentation graphique associée à ce triplet est la suivante : le sommet racine S est départ de deux branches, l'une partant vers la gauche, reliant S à A_1 , et l'autre partant vers la droite, reliant S à A_2 .

Dans la figure 2, on a représenté les arbres A_1 et A_2 permettant de définir l'arbre A de la figure 1.



FIG. 2 – Les arbres A_1 et A_2 pour l'arbre de la figure 1

On appelle « fils » d'un sommet s un sommet qui lui est adjacent, et plus éloigné de la racine. Ainsi, dans un arbre binaire, tout nœud a exactement deux fils (nœud(s) ou feuille(s)), et aucune feuille n'a de fils. On parle de fils droit de s pour désigner le fils situé sur la branche la plus à droite issue de s ; on définit de manière similaire le fils gauche. De manière symétrique, on définit la notion de père. Seule la racine n'a pas de père. Tous les autres sommets ont un et un seul père.

1. (a) Existe-il des arbres binaires à 2 sommets? Donner tous les arbres binaires à 3, 4, 5, 6 et 7 sommets.
(b) Conjecturer une relation entre le nombre de feuilles et le nombre de nœuds d'un arbre binaire.
Si la conjecture est vraie, quelle est la parité de nombre de sommets d'un arbre binaire?
2. **Première démonstration de la conjecture de la question 1.**
(a) Soit A un arbre binaire à au moins 3 sommets. Montrer qu'il existe au moins un nœud N dont les deux fils sont des feuilles.
(b) On se donne un tel nœud N . Montrer qu'en remplaçant ce nœud et les deux feuilles qui lui sont attachées par une unique feuille, on obtient encore un arbre binaire (voir Figure 3 pour une illustration de cette construction)

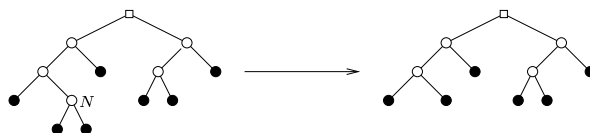


FIG. 3 – Suppression d'un nœud

- (c) En déduire une démonstration par récurrence de la conjecture.
3. **Deuxième démonstration de la conjecture de la question 1.**
Soit $A = (S, A_1, A_2)$ un arbre. Exprimer le nombre de nœuds (resp. de feuilles) de A en fonction du nombre de nœuds (resp. de feuilles) de A_1 et de A_2 . Conclure.

Partie II – Dénombrement des arbres binaires

Un arbre avec une feuille marquée est un couple (A, F) , où A est un arbre, et F une feuille de A . De même, un arbre avec un nœud marqué est un couple (A, N) , où A est un arbre et N un nœud de A .

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des arbres binaires à n nœuds (c'est-à-dire sommets internes), $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des arbres binaires à n nœuds avec une feuille marquée, et $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des arbres binaires à n nœuds avec un nœud marqué. On note B_n le cardinal de $\mathcal{B}_n$, F_n le cardinal de $\mathcal{F}_n$ et N_n le cardinal de $\mathcal{N}_n$.

1. Exprimer une relation entre B_n et F_n , ainsi qu'entre B_n et N_n . Justifier très rigoureusement votre réponse.

On se donne (A, N) un arbre binaire dont un nœud est marqué, ainsi qu'une direction, gauche ou droite (c'est-à-dire un élément d'un ensemble à deux éléments $\{G, D\}$). On construit un nouvel arbre à partir de (A, N) en dédoublant le nœud N : on insère un nouveau nœud N' entre N et son père, et afin d'obtenir un arbre binaire, on greffe une feuille F sur N' , en s'arrangeant pour qu'elle soit le fils (ou plutôt la fille) gauche de N' si la direction choisie était G , et qu'elle soit le fils droit si la direction choisie était D . On définit ainsi un nouvel arbre A' , muni d'une feuille marquée F . La figure 4 illustre cette construction, dans le cas où la direction choisie est G .

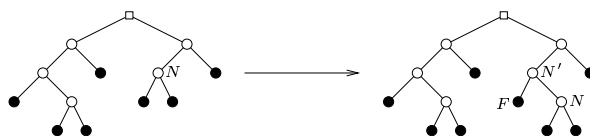
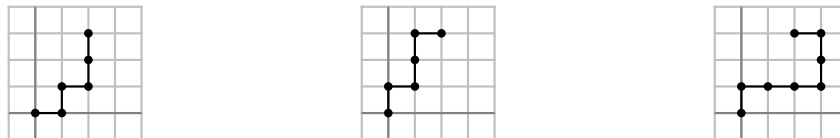


FIG. 4 – Dédoublage d'un nœud

2. Montrer que cette construction définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application : $\Phi_n : \mathcal{N}_n \times \{G, D\} \longrightarrow \mathcal{F}_{n+1}$. Montrer que Φ_n est une bijection.
3. En déduire une relation satisfaite par $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis l'identité : $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = F_n$.
4. En utilisant la définition des arbres binaires, montrer que les nombres de Catalan vérifient la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_{n+1} = \sum_{k=0}^n \Gamma_k \cdot \Gamma_{n-k}$.
5. Réciproquement, montrer que toute suite $(\Gamma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant cette relation de récurrence et la condition initiale $\Gamma'_0 = 1$ est égale à la suite $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Catalan.

Partie III – Chemins de Dyck

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On appelle chemin de $(0, 0)$ à (a, b) une succession de pas montants (augmenter l'ordonnée de 1) et de pas à droite (augmenter l'abscisse de 1) reliant $(0, 0)$ à (a, b) . Ainsi, un chemin est une succession de points $(x_i, y_i)_{i \in [0, a+b]}$ tels que pour tout $i \in [1, a+b]$, $(x_i, y_i) = (x_{i-1} + 1, y_{i-1})$ (on a effectué un pas à droite) ou $(x_i, y_i) = (x_{i-1}, y_{i-1} + 1)$ (on a effectué un pas montant), et tels que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, et $(x_{a+b}, y_{a+b}) = (a, b)$.

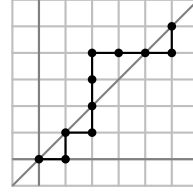
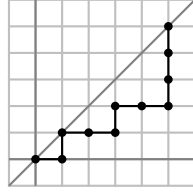


Par exemple, les deux premières figures ci-dessus représentent deux chemins différents de $(0, 0)$ à $(2, 3)$. Le troisième n'est en revanche pas un chemin, car il comporte un pas vers la gauche. La longueur d'un chemin est le nombre de pas.

1. Montrer que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) est $\binom{a+b}{a}$.

Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin de $(0, 0)$ à (n, n) dont tous les points sont sous la diagonale $\Delta : y = x$ (au sens large). On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$, et D_n son cardinal, c'est-à-dire le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

Par exemple, le premier chemin ci-dessous est un chemin de Dyck, mais pas le deuxième.



2. Première méthode de dénombrement des chemins de Dyck.

(a) Montrer que le nombre de chemins de Dyck ne rencontrant la diagonale qu'en $(0,0)$ et (n,n) est D_{n-1} .

(b) En triant suivant la coordonnée du premier point d'intersection (autre que $(0,0)$) du chemin avec la diagonale, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, D_{n+1} = \sum_{k=0}^n D_k D_{n-k}$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \Gamma_n$.

3. Deuxième méthode de dénombrement des chemins de Dyck.

Soit Γ un chemin d'origine $(0,0)$; on le représente par une suite de 0 et de 1, les 1 représentant les pas montants, et les 0 les pas vers la droite. Ainsi, $(0,1,0,1)$ est le chemin constitué d'un pas vers la droite, puis d'un pas montant, puis d'un pas vers la droite, et un pas montant pour terminer.

Soit Γ et Γ' deux chemins, représentés par des suites $(a_1, \dots, a_N)$ et $(b_1, \dots, b_N)$ de 0 et de 1. On dit que Γ' est un conjugué de Γ s'il existe $p \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\Gamma' = (a_{p+1}, \dots, a_N, a_1, \dots, a_p)$.

On appelle classe de conjugaison du chemin Γ l'ensemble des chemins Γ' conjugués à Γ .

(a) Quel est le nombre de conjugués de $(0,1,1,0,0,1,1)$? de $(0,1,1,0,1,1)$?

(b) Soit Γ un chemin de longueur ℓ . Montrer que la classe de conjugaison de Γ est de cardinal ℓ si et seulement si Γ n'admet pas de période stricte (c'est-à-dire répétée au moins deux fois)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Γ un chemin de Dyck de longueur $2n$. On lui associe un chemin $\bar{\Gamma}$ en lui rajoutant un pas montant. Par exemple, si $\Gamma = (0,1,0,1)$, alors $\bar{\Gamma} = (0,1,0,1,1)$.

Quel est le cardinal de la classe de conjugaison de $\bar{\Gamma}$ dans l'exemple ? en général ?

(d) Soit Γ' un chemin quelconque reliant $(0,0)$ à $(n,n+1)$. Montrer qu'il existe un et un seul chemin de Dyck Γ de longueur $2n$ tel que $\bar{\Gamma}$ soit dans la classe de conjugaison de Γ' .

Indication : Soit $(x_k, y_k)_{k \in [0, 2n]}$ la suite des points de Γ' . Soit p le plus petit entier k tel que $y_k - x_k$ soit maximal (c'est-à-dire le premier pas après lequel on se retrouve « le plus au-dessus » de la diagonale). Considérer le conjugué de Γ' obtenu grâce à p .

(e) En étudiant la fonction qui à tout chemin Γ' de $(0,0)$ à $(n,n+1)$ associe l'unique chemin de Dyck Γ de tel que $\bar{\Gamma}$ soit dans sa classe de conjugaison, montrer que $D_n = \Gamma_n$.

Partie IV – Une bijection entre chemins de Dyck et arbres binaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les parties II et III, il y a autant d'arbres binaires à n nœuds que de chemins de Dyck de longueur $2n$. Le but de cette partie est de donner une preuve constructive (et non calculatoire) de ce résultat : nous construisons pour tout $n \in \mathbb{N}$ une bijection Φ_n entre $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{D}_n$. Ainsi, ces deux types d'objets (arbres binaires et chemins de Dyck) en apparence bien différents, sont en fait très étroitement liés.

Nous définissons Φ_n par récurrence sur n en suivant la définition récursive des arbres :

- Si $n = 0$, il existe un unique arbre binaire A à 0 nœud ; $\Phi(A)$ est l'unique chemin de Dyck de longueur 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et on suppose que $\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1}$ sont construits. Soit A un arbre binaire à n nœuds, décrit par le triplet (S, A_1, A_2) , où A_1 est un arbre à k nœuds, et A_2 un arbre à $n-1-k$ nœuds, pour une certaine valeur de $k \in [1, n-1]$. On définit alors un chemin :

$$\Phi_n(A) = (0, \Phi_k(A_1), 1, \Phi_{n-1-k}(A_2)).$$

Il s'agit donc du chemin constitué d'un pas vers la droite, du chemin $\Phi_k(A_1)$, d'un pas vers le haut, suivi du chemin $\Phi_{n-1-k}(A_2)$.

1. Déterminer $\Phi_n(A)$ pour les arbres trouvés dans la question I-1a, ainsi que pour l'arbre de la figure 1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ_n est bien définie, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathcal{D}_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ_n est une bijection.