Vous êtes invités à soigner la présentation de votre copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de vos affirmations.

PROBLEME 2

Un jeu réunit une infinité de joueurs $A_1, A_2, ..., A_n, ...$

- D'abord A_1, A_2, A_3 disputent ensemble un tournoi qui les classe (sans ex-aequo), les différents classements possibles étant équiprobables. Le joueur classé dernier est éliminé.
- Les deux autres et A_4 disputent un deuxième tournoi analogue (indépendamment du premier) qui classe ces trois joueurs. Le joueur classé dernier est éliminé.
- Il peut se faire qu'un même joueur arrive premier à ces deux tournois : dans ce cas, il est déclaré gagnant du jeu, et le jeu s'arrête.
- Sinon, les joueurs restant après le deuxième tournoi disputent avec A_5 un troisième tournoi analogue (indépendant des deux premiers) etc...
- A chaque tournoi, le joueur classé dernier est éliminé, et les deux autres rencontrent le suivant.
- Est décrété gagnant du jeu le premier joueur qui se trouve classé premier à deux tournois successifs (et alors le jeu s'arrête).

- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note G_n l'évènement :

$$\text{"}A_1 \text{ est gagnant du jeu au } n^{ième} \text{ tournoi"}.$$

- Enfin, soit X la variable aléatoire égale au nombre de tournois disputés (pour déterminer le gagnant).

L'objet du problème est d'étudier la variable aléatoire X et calculer la probabilité pour que le joueur A_1 gagne.

Partie I : loi de X et probabilité de G_n pour $n \in \{2, 3, 4, 7\}$

1. Calculer $P(G_2)$, c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur A_1 remporte les deux premiers tournois (et gagne alors le jeu). Que vaut $P(X = 2)$?

2. Pour tout entier $k \geqslant 4$, on note J_k l'évènement : "A_k joue".

a. Montrer que $P(J_5) = \dfrac{2}{3}$. Pour $i \geqslant 4$, que vaut $P(J_{i+1}/J_i)$?

b. En déduire que $P(J_k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-4}$.

3. **a.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, comparer les évènements $(X \geqslant n)$ et J_{n+2}.

b. En déduire la valeur de $P(X = n)$.

c. Vérifier que l'on a bien : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

4. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Dans toute la suite, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels non nuls, on considère les évènements P_i et S_j suivants :

P_i : "A_1 est classé premier au $i^{ième}$ tournoi"

S_j : "A_1 est classé second au $j^{ième}$ tournoi et le jeu continue"

5. Exprimer G_3 et G_4 à l'aide de ces événements.

6. **a.** Calculer $P(G_3)$.

b. Montrer que $P(S_2/S_1) = \dfrac{1}{6}$ et que $P(S_2/P_1) = \dfrac{1}{3}$.

Prouver que $P(G_4) = \dfrac{1}{54}$.

7. **a.** Ecrire les suites des classements de A_1 (au cours des 7 premiers tournois) favorables à l'évènement G_7 (on vérifiera qu'il y en a huit).

b. Calculer $P(G_7)$.

Partie II : probabilité pour que le joueur A_1 gagne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, soit $\mathcal{U}_n^k$ l'ensemble des n-listes de $\{1, 2\}$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

$a)$ elles finissent par un "2";

$b)$ elles ne contiennent jamais deux "1" consécutifs;

$c)$ k fois (exactement) un "2" est suivi d'un autre "2".

On pose $u_n^k = \text{card}\,\mathcal{U}_n^k$, avec la convention : $u_0^0 = 1$.

Exemples : $(1,2,2,1,2,1,2,2,2,1,2) \in \mathcal{U}_{11}^3$; $(1,2,2,2) \in \mathcal{U}_4^2$; $(2,1,2,2) \in \mathcal{U}_4^1$; $(2,2,1,2,2) \in \mathcal{U}_5^2$; $(1,2,2,2,2) \in \mathcal{U}_5^3$

1. Calcul de u_n^k

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{U}_n^0, \mathcal{U}_n^n, \mathcal{U}_{n+1}^n, \mathcal{U}_{n+2}^n$.

En déduire que $u_n^0 = 1,\ u_n^n = 0,\ u_{n+1}^n = 1,\ u_{n+2}^n = 1$.

b. En classant les n-listes de $\mathcal{U}_n^k$ suivant la valeur de leur $(n-1)^{ième}$ élément, montrer que :

$$\forall n \geq 3\ ,\ \forall k \geq 1\ ,\ u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}.$$

c. Pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, i]\!]$, on pose $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^i$ et $\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j$.

i. Calculer γ_i^0 et γ_i^i; pour $i \geqslant 2$ et $j \in [\![1, i-1]\!]$, exprimer $\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j$ en fonction de γ_i^j.

En déduire que $\gamma_i^j = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$.

ii. Procéder de la même façon qu'au 1c.i pour obtenir δ_i^j.

iii. En déduire que : $\quad \forall (k, p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = \begin{pmatrix} k+p \\ p \end{pmatrix}$.

2. Probabilité pour que A_1 gagne : on note p_1 cette probabilité

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\quad P(G_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} u_{n-2}^k \left(\dfrac{1}{6}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}$.

[il est conseillé, pour traiter cette question, d'avoir auparavant compris le calcul de $P(G_7)$ effectué à la fin de la première partie.]

b. A l'aide d'une "permutation de $\sum$" (dont on admettra la validité), montrer que :

$$p_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \beta_k \text{ avec } \beta_k = \sum_{n=k+2}^{+\infty} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

c. Calculer β_0.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} k+p \\ p \end{pmatrix} x^p = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Calculer $\alpha_k = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+1}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+2p+3}$ et $\alpha'_k = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+2}^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+2p+4}$.

e. Pour $k \geqslant 1$, montrer que $\beta_k = \dfrac{4}{27}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{k+1}$. [Indication : on admettra que dans une série convergente à termes positifs, on ne change pas la valeur de la somme en faisant des sommations par paquets]

f. En déduire enfin la valeur de p_1.