Lycée Carnot — Lundi 27 février 2005

ECS 3/4 – Mathématiques

Devoir surveillé n° 6 (4 heures)
Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle
Application à l'étude de cas particuliers d'une conjecture d'Ilieff et Sendov

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

On dit que deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux s'ils sont non nuls et n'ont pas de racine commune. Nous énonçons en début de chaque partie les résultats essentiels démontrés dans cette partie. Ces résultats pourront être admis dans les parties suivantes.

Partie I – Décomposition « en éléments simples » de $\frac{P'}{P}$

Théorème 1 *Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont l'ensemble des racines est $R = \{r_1, \dots, r_s\}$, la multiplicité de r_i étant α_i, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$. Alors : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus R$,* $\displaystyle\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i}{x - r_i}$.

1. En reconnaissant en $\frac{P'}{P}$ la dérivée d'une certaine expression, démontrer le théorème 1 dans le cas où P est un polynôme à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles.
2. En utilisant les règles de dérivation d'un produit de s termes, donner une autre démonstration du théorème 1, valable cette fois pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Dans les deux parties qui suivent, on généralise cette décomposition, appelée « décomposition en éléments simples » dans le cas d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$. La partie IV est indépendante des parties II et III.

Partie II – Le théorème de Bezout

Théorème 2 *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux qui ne soient pas tous les deux constants. Alors il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$ et $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.*

Corollaire 3 *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux qui ne soient pas tous les deux constants, et A un troisième polynôme tel que $\deg A < \deg P + \deg Q$. Alors il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = A$ et $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.*

1. Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux tels que $\deg P \geqslant \deg Q$. On note R le reste de la division euclidienne de P par Q.
   (a) Montrer que si P est constant (et donc pas Q), le théorème 2 est vrai.

   On suppose que P et Q sont tous les deux non constants.

   (b) R peut-il être nul ? Montrer que R et Q sont premiers entre eux.

   (c) Justifier que la véracité du théorème de Bezout pour Q et R entraîne l'existence de U_0 et V_0 (sans condition de degrés) tels que $U_0 P + V_0 Q = 1$.
2. Soit P et Q deux polynômes. On suppose qu'il existe U_0 et V_0 tels que $U_0 P + V_0 Q = 1$.
   Montrer qu'il existe U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$, et $\deg(U) < \deg Q$, $\deg(V) < \deg P$.
   (On pourra effectuer la division euclidienne de U_0 par Q.)
3. En raisonnant par récurrence sur $\min(\deg(P), \deg(Q))$, montrer le théorème 2.

4. En multipliant l'égalité du théorème de Bezout par un polynôme bien choisi, et en vous inspirant de la question 2, démontrer le corollaire 3.
5. On suppose qu'on a défini en Turbo Pascal un type `polynome` (on se limite à des coefficients réels), et qu'on sache effecuer la somme $P+Q$, la différence $P-Q$ le produit interne $P*Q$ et le produit par un réel $a*P$ sur les variables de ce type, opérations que l'on effectue avec les signes opératoires usuels. On suppose qu'on dispose de fonctions :
   - `monome` prenant en argument un entier n et renvoyant le polynôme X^n ;
   - `deg` prenant en paramètre un polynôme et renvoyant son degré ;
   - `constante` prenant en paramètre un polynôme et renvoyant son terme constant. Ainsi, si P est de degré 0, P et `constante(P)` ont la même valeur, mais le premier est de type `polynome` tandis que le second est de type `real`.

   On admettra pour la question b qu'une procédure peut faire appel à elle-même (principe de récursivité). Par exemple, même si ce n'est pas la méthode recommandée, le calcul de la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ peut se faire de la manière suivante :

```
procedure calculun(n:integer; var u:real);
begin
  if n=0 then u:=1    {condition initiale (= condition d'arrêt de l'appel récursif)}
         else
           begin
             calculun(n-1,u);  {calcul récursif de u_(n-1)}
             u:=2u+1;          {calcul de u_n à partir de u_(n-1)}
           end;
end;
```

   (a) Écrire une procédure `division` prenant en paramètres d'entrée deux polynômes P et Q et donnant en paramètres de sortie le quotient S et le reste R de la division de P par Q.

   (b) Écrire une procédure `Bezout1` prenant en paramètre d'entrée deux polynômes P et Q que l'on supposera premiers entre eux et non tous deux constants (ne pas faire de test !) et renvoyant en paramètre de sortie deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$ (sans condition de degré).

   (c) Écrire une procédure `Bezout2` d'entrées et sorties similaires à `Bezout1`, mais avec les conditions de degré sur U et V (on pourra réutiliser la procédure `Bezout1`).

Partie III – Décomposition en éléments simples

Théorème 4 *Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, et $R = \{r_1, \dots, r_s\}$ l'ensemble des racines (complexes) distinctes de Q. Alors il existe une décomposition de $\frac{P}{Q}$ de la forme suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus R,\quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{s} F_i(x), \qquad \text{où} \qquad \forall i \in [\![1, s]\!],\ \forall x \in \mathbb{C} \setminus R,\quad F_i(x) = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(x - r_i)^j},$$

α_i étant l'ordre de multiplicité de la racine r_i dans Q, E étant un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, et les $\lambda_{i,j}$ étant des nombres complexes.

1. Montrer que le polynôme E du théorème 4 est unique, et est égal au quotient de la division de P par Q. En déduire qu'on peut se contenter de démontrer le cas où $\deg P < \deg Q$, cas dans lequel $E = 0$.
2. **Exemples.** Expliciter la formule du théorème 4 dans les cas suivants (on ne demande pas d'expliciter les $\lambda_{i,j}$; en revanche, on déterminera E) :

   (a) $x \mapsto \dfrac{x^4}{(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)}$; (b) $x \mapsto \dfrac{x^5+1}{(x^2+x+1)^2}$; (c) $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x-1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

On suppose désormais que $\deg P < \deg Q$; on a vu que dans ce cas, $E = 0$. On rappelle que P et Q sont premiers entre eux. On suppose également que P et Q sont unitaires, ce qui n'entraîne aucune perte de généralité. On utilise les notations du théorème.

4. Montrer qu'il existe des polynômes A_1 et P_1 tels que $\deg(A_1) < \alpha_1$ et $\deg(P_1) < \sum_{i=2}^{s} a_i$ et :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus R, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1(x)}{(x-r_1)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-r_2)^{\alpha_2} \cdots (x-r_s)^{\alpha_s}}.$$

(On pourra utiliser le corollaire du théorème de Bezout)

5. Montrer qu'il existe des polynômes $A_1, \ldots, A_s$, tels que $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\deg(A_i) < \alpha_i$

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus R, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i(x)}{(x-r_i)^{\alpha_i}}.$$

6. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout polynôme A de degré au plus $\alpha - 1$, il existe d'uniques complexes $\lambda_0, \ldots, \lambda_{\alpha-1}$ tels que : $A = \lambda_0 + \lambda_1(X - r) + \cdots + \lambda_{\alpha-1}(X - r)^{\alpha-1}$.
(On pourra raisonner par récurrence sur α)

7. En déduire le théorème 4.

8. **Application au calcul d'intégrales**

   (a) Premier exemple

   i. Justifier qu'il existe des nombres (*a priori* complexes) a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

   ii. En multipliant l'égalité de la question précédente par $x + 1$ et en prenant de part et d'autre de l'égalité la limite lorsque x tend vers -1, déterminer a.

   iii. Déterminer de même b.

   iv. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$.

   v. Montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1).$$

   (b) Deuxième exemple.

   i. Justifier l'existence de complexes a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}.$$

   ii. Déterminer b et c en vous inspirant des méthodes de l'exemple précédent.

   iii. Déterminer a en multipliant l'égalité du (i) par x et en considérant la limite en $+\infty$.

   iv. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-1)}$.

Partie IV – Autour d'une conjecture d'Ilieff et Sendov

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, de degré au moins égal à 2. Soit z une racine de S. On dit que S et z vérifient (IS) s'il existe une racine ζ du polynôme dérivé S' telle que $|z - \zeta| \leqslant 1$. On dit que S vérifie (IS) si pour toute racine z de S, z et S vérifient (IS).

Conjecture 5 *Tout polynôme de degré au moins égal à 2 et dont les racines sont de module au plus égal à 1 vérifie (IS).*

Dans toute la suite, on se donne un polynôme P de degré $n \geqslant 2$. On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note également $z_0, \ldots, z_m$ les racines distinctes de P, de multiplicités respectives $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$. On suppose que pour tout $i \in [\![0, m]\!]$, $|z_i| \leqslant 1$.

1. Justifiez que $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = n$ et que $P = a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{\alpha_i}$.
2. Prouver que si $n = 2$, alors P vérifie (IS).
(On pourra exprimer la racine de P' en fonction des deux racines, éventuellement égales, de P)
3. (a) Soit $i \in [\![0, m]\!]$. Montrer que si $\alpha_i \geqslant 2$, alors P et z_i vérifient (IS).
   (b) En déduire que si P n'a pas de racine simple, P vérifie (IS).
4. Montrer qu'il existe m nombres complexes $w_1, \ldots, w_m$ (pas forcément distincts), qui ne sont pas racines de P, et tels que :
$$P' = na_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j=1}^{m} (X - w_j).$$
On conserve ces notations jusqu'à nouvel ordre.
5. *On suppose $\alpha_0 = 1$.*
   (a) En dérivant l'expression de P de la question 1, montrer que $\prod_{j=1}^{m} (z_0 - w_j) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{m} (z_0 - z_i)$.
   (b) En déduire que si $n \geqslant 2^m$, alors :
      i. $\prod_{j=1}^{m} (z_0 - w_j) \leqslant 1$,
      ii. P et z_0 vérifient (IS),
      iii. P vérifie (IS).
   (c) *On ne suppose plus $n \geqslant 2^m$, mais toujours $\alpha_0 = 1$.*
   Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$.
      i. À l'aide du théorème 1, et en considérant $\frac{P'(w_j)}{P(w_j)}$, montrer que w_j est un barycentre à coefficients strictement positifs des z_i, $i \in [\![1, m]\!]$.
      ii. En déduire que $|w_j| \leqslant 1$.
      iii. Montrer que si $z_0 = 0$, alors P et z_0 vérifient (IS).
      iv. Montrer que si 0 est la seule racine simple de P, alors P vérifie (IS).
6. *On suppose toujours que $\alpha_0 = 1$, et on change légèrement de notations en posant :*
$$P' = na_n \prod_{i=1}^{n-1} (X - t_i),$$
où les t_i sont maintenant les racines (non forcément distinctes) de P'.
   (a) Justifiez que pour tout z non racine de P', $\frac{P''(z)}{P'(z)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{z - t_i}$.
   (b) En déduire que si $\left| \frac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| \geqslant n - 1$, alors P et z_0 vérifient (IS).
   (On pourra raisonner par l'absurde et majorer $\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$.)
   (c) Soit $Q = \frac{P}{X - z_0}$.
      i. Montrer que pour tout $z \notin \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$, $\frac{P''(z)}{P'(z)} = \frac{Q'(z)}{Q(z)}$
      ii. En déduire une expression de $\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ en fonction des z_i, $i \in [\![1, m]\!]$.
   (d) *On suppose que $z_0 = 1$.*
      i. Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, on a : $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.
      ii. En déduire que $\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{1 - z_i}\right) \geqslant \frac{1}{2}(n-1)$.
      iii. En utilisant la question 6c, en déduire qu'il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-t_i}\right) \geqslant 1$.
      iv. Pour une telle valeur de i, justifier que $\left|t_i - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, puis que $|t_i - 1| \leqslant 1$. Conclusion ?
   (e) On suppose z_0 de module 1 (et toujours $\alpha_0 = 1$). En utilisant une transformation géométrique simple de $\mathbb{C}$, prouver que P et z_0 vérifient (IS).
7. On suppose que les racines simples de P sont toutes nulles ou de module 1. Montrer que P vérifie (IS).