Lycée Carnot — Vendredi 5 mai 2006

ECS 3/4 – Mathématiques

Concours blanc n° 2 – Mathématiques II (DS 9) – 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Exercice – Réduction d'une matrice – Probabilités

1. *Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par :* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible, et donner A^{-1} en cas d'inversibilité.
   (b) Calculer $A^2 - 2aA$, et retrouver l'expression de A^{-1} en cas d'inversibilité.
   (c) Déterminer en fonction de a et b les valeurs propres de A.
   (d) A est-elle diagonalisable ? Lorsqu'elle l'est, la diagonaliser.
   (e) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n.

2. *Soit $p \in]0,1[$, et $q = 1 - p$. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, et suivant la même loi géométrique de paramètre p.*
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit la matrice : $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.
   On note $S(\omega)$ la plus grande valeur propre de $M(\omega)$, et $D(\omega)$ la plus petite. Cela définit deux variables aléatoires S et D sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
   (a) Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M(\omega)$ soit inversible ?
   (b) Exprimer S et D en fonction de X et Y et déduire pour chacune son espérance et sa variance.
   (c) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.
   (d) Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
   (On pourra considérer les événements $[S = 2]$ et $[D = 0]$.)
   (e) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $P(S = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.
   (f) On suppose que $p = \frac{2}{21}$. Quelle est la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$?

Problème – Réduction d'une matrice tridiagonale – sommes trigonométriques

L'objet du problème est l'étude de l'interpolation d'une fonction par des fonctions trigonométriques, c'est-à-dire l'approximation par une fonction trigonométrique coïncidant en un certain nombre de points. Dans une première partie, on établit des propriétés d'une matrice permettant d'obtenir les fonctions d'interpolation. La seconde partie est destinée à l'étude du procédé d'interpolation. On y étudie notamment un cas particulier.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I – Diagonalisation d'une matrice tridiagonale

Soit $A_n = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ *la matrice carrée d'ordre* n *définie par :* $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ |i-j| = 1 \\ 0 & si\ |i-j| \neq 1 \end{cases}$

Ainsi : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans cette partie, on se propose d'abord de diagonaliser la matrice A_n*, puis d'étudier une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de* A_n*.*

1. *Pour tout élément* X *de* $\mathbb{R}^n$*, on pose :* $q_n(X) = {}^tXA_nX$*. Dans toute la suite, on écrit* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   Calculer A_nX, puis vérifier que : $q_n(X) = 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

2. **Étude du cas particulier** $n = 2$

   (a) Montrer que, pour tout élément X de $\mathbb{R}^2$: $-{}^tXX \leqslant q_2(X) \leqslant {}^tXX$.

   (b) Déterminer les valeurs propres et une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A_2.
   (On pourra utiliser les résultats de l'exercice.)

   (c) Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $|q_2(X)| = {}^tXX$ si et seulement si X est un vecteur propre de A_2.

3. **Encadrement des valeurs propres de** A_n

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, et pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$:

   $$-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant q_n(X) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2).$$

   (b) En déduire que :

      i. pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: $-2\,{}^tXX \leqslant q_n(X) \leqslant 2\,{}^tXX$;

      ii. $|q_n(X)| = 2\,{}^tXX$ si et seulement si $X = 0$.
      (On pourra rechercher les cas d'égalité dans *toutes* les inégalités utilisées pour obtenir l'encadrement de la question (i))

   (c) Soit λ une valeur propre de A_n, et X un vecteur propre associé à λ.

      i. Montrer que : $q_n(X) = \lambda\,{}^tXX$.

      ii. En conclure que : $-2 < \lambda < 2$.
      (On justifiera soigneusement que les inégalités sont strictes.)

4. **Diagonalisation de la matrice** A_n

   Soit λ *un élément de l'intervalle* $]-2,2[$ *; on note* F_λ *l'ensemble des suites réelles* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telles que, pour tout nombre entier naturel* k *:* $u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$*.*

   (a) Justifier qu'il existe un unique réel $t \in]0,\pi[$ tel que $\lambda = 2\cos t$. Dans la suite, t désigne ce réel.

(b) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un élément de F_λ.

   i. Justifier que : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall k\in\mathbb{N},\ u_k=\alpha\cos(kt)+\beta\sin(kt)$.
   (On pourra commencer par exprimer $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$.)

   ii. Exprimer α et β en fonction de u_0, u_1 et t.

Soit $F_\lambda(n)$ le sous-ensemble de F_λ constitué des éléments $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F_λ vérifiant la condition supplémentaire : $u_0=u_{n+1}=0$.

(c) Justifier que $F_\lambda(n)$ est un espace vectoriel.

(d) Déterminer, en discutant selon les valeurs de t, les éléments de $F_\lambda(n)$.

(e) Soit λ un nombre réel et $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

   Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   i. λ est valeur propre de A_n, et X est un vecteur propre associé à λ ;

   ii. la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_k=x_k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $u_{n+1}=0$ et $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$ pour tout entier $k\geqslant n$, appartient à $F_\lambda(n)$.

(f) i. En déduire que les valeurs propres de A_n sont les nombres réels $\lambda_p=2\cos\theta_p$, $p\in[\![1,n]\!]$, où $\theta_p=\dfrac{p\pi}{n+1}$.

   ii. Justifier que A_n est diagonalisable.

   iii. Déterminer, pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, le sous-espace propre E_{λ_p}.

5. **Étude de la matrice de passage**

Soit $M_n=(m_{k,p})_{(k,p)\in[\![1,n]\!]^2}$, définie par : $\forall(k,p)\in[\![1,n]\!]^2,\ m_{k,p}=\sin\dfrac{kp\pi}{n+1}=\sin(k\theta_p)=\sin(p\theta_k)$.

(a) Justifier à l'aide des questions précédentes que M_n est inversible, et exprimer le produit $M_n^{-1}A_nM_n$.

(b) Soit λ et μ des valeurs propres distinctes de A_n, et X et Y des vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ.

   i. Vérifier que : $\lambda\ {}^tXY=\mu\ {}^tXY$.

   ii. En déduire que : $\forall(p,q)\in[\![1,n]\!]^2,\ \ p\neq q\Longrightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(k\theta_p)\sin(k\theta_q)=0$.

(c) Soit $p\in[\![1,n]\!]$. Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=-1$.

(d) À l'aide des questions précédentes, calculer M_n^2, et en déduire M_n^{-1}.

Partie II – Application à l'étude de séries trigonométriques

1. **Interpolation trigonométrique**

Soit $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$. On lui associe la fonction numérique g_B définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ g_B(t)=\sum_{k=1}^{n}b_k\sin(kt). \tag{1}$$

(a) Soit $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$. En discutant suivant la valeur de (k,ℓ), et en se servant d'une formule de trigonométrie, calculer l'intégrale $I_{k,\ell}=\displaystyle\int_0^\pi\sin(kt)\sin(\ell t)\ \mathrm{d}t$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\pi} g_B^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

(c) Calculer M_nB. Montrer que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$: $b_k = \displaystyle\frac{2}{n+1}\sum_{p=1}^{n} g_B(\theta_p)\sin(k\theta_p)$.

(d) Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Justifier qu'il existe un et un seul élément $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $g_B(\theta_p) = c_p$.

L'objet des questions suivantes jusqu'à la fin du problème est d'étudier, pour tout $n \geqslant 2$, l'unique fonction trigonométrique g_n définie par une équation du type (1), telle que, pour tout entier p compris entre 1 et n, on ait $g_n(\theta_p) = 1$. On écrira : $g_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(n)\sin(kt)$.

2. **Étude des coefficients $a_k(n)$**

(a) Montrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\quad b_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{2}{n+1}\cdot\dfrac{\cos\frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

(b) i. Étudier les variations sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

ii. Justifier qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $-Mt^2 \leqslant \cos t - 1 \leqslant 0$.

iii. En déduire que $\sin x = x + O(x^3)$ au voisinage de 0.

iv. Déterminer l'existence et la valeur de la limite en 0 de f.

(c) Déduire de l'étude précédente que, pour tout entier impair $k \in [\![1,n]\!]$:

$$0 \leqslant \frac{4}{k\pi} - b_k(n) \leqslant \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

(d) En déduire l'existence et la valeur β_k de la limite de $b_k(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. **Et on fait tendre n vers $+\infty$**

*(Question **hors-barême**, notée en bonus uniquement si le reste de la copie dépasse la note de 60/120)*

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $h_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \sin(kt)$.

(a) En appliquant (1b) à un vecteur bien choisi, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} (g_n(t) - h_n(t))^2\ \mathrm{d}t = 0$.

(b) On admet que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}(1 - h_n(t))^2\ \mathrm{d}t = 0$.

(c) En déduire l'existence et la valeur de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{\pi}(1 - g_n(t))^2\ \mathrm{d}t.$$