

Algèbre 1 – Logique – Types de démonstration

Exercice 1 – Montrer que la négation de $P \iff Q$ est $P \iff \neg Q$.

Exercice 2 – Démontrer à l'aide de tables de vérité les assertions suivantes :

1. $P \implies Q \equiv \neg P \vee Q$; comparer avec $\neg Q \implies \neg P$;
2. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ (associativité de $\wedge$);
3. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ (associativité de $\vee$);
4. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (distributivité de $\vee$ sur $\wedge$);
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (distributivité de $\wedge$ sur $\vee$);

Exercice 3 – Soit R , S et T des propositions. Montrer à l'aide de tables de vérité, puis par un raisonnement intuitif, que les propositions suivantes sont vraies :

1. $R \implies (S \implies R)$.
2. $(R \implies S) \implies ((S \implies T) \implies (R \implies T))$.
3. $(R \vee S) \iff ((R \implies S) \implies S)$.
4. $(R \implies (S \vee T)) \iff (S \vee (R \vee T))$.
5. $(R \implies S) \implies ((R \wedge T) \implies (S \wedge T))$.
6. $(R \iff S) \implies ((T \implies R) \iff (T \implies S))$.

Exercice 4 – Démontrer les propositions suivantes :

1. $((\forall x)(R \vee S)) \implies ((\forall x)R \vee (\exists x)S)$.
2. Si x n'intervient pas dans R , $((\forall x)(R \vee S)) \iff (R \vee \forall x S)$.
3. Si x n'intervient pas dans R , $(\exists x)(R \wedge S) \iff (R \wedge (\exists x)S)$.

Exercice 5 – Nier les propositions suivantes (on écrira $P(x)$ pour « x vérifie la propriété P ») :

1. $\exists x$, x vérifie P .
2. $\forall x$, x vérifie P .
3. $\exists x, \exists y$, tel que le couple (x, y) vérifie P .
4. x vérifie P_1 et y vérifie P_2 .
5. x vérifie P_1 ou y vérifie P_2 .
6. $\exists x, \forall y$, x vérifie P_1 et (x, y) vérifie P_2 .
7. $\forall x, \exists y$, x vérifie P_1 ou (x, y) vérifie P_2 .
8. $\forall x$, x vérifie P_1 , ou $\exists x$, x ne vérifie pas P_2 .

Exercice 6 – On dispose d'élèves x répartis dans des classes c . Chaque classe est donc un ensemble d'élèves. Ainsi x est dans la classe c se traduit par $x \in c$. On note C l'ensemble des classes, A l'ensemble des anglophones et E l'ensemble des hispanophones. Formaliser les assertions suivantes, puis les nier.

1. Il existe un élève étudiant l'anglais.
2. Dans toutes les classes, il existe un élève étudiant l'anglais.
3. Cet élève X étudie l'anglais et l'espagnol.
4. Au moins un élève étudie l'anglais et l'espagnol.
5. Tous les élèves étudiant l'espagnol étudient également l'anglais.
6. Dans toutes les classes, au moins un élève étudie à la fois l'anglais et l'espagnol.
7. Dans une classe au moins, tous les élèves étudient à la fois l'anglais et l'espagnol.

8. Ou bien dans toute classe un élève étudie à la fois l'anglais et l'espagnol, ou bien il existe une classe dans laquelle tous les élèves étudient soit l'anglais soit l'espagnol.
9. Si dans toute classe, il existe un élève étudiant soit l'anglais soit l'espagnol, alors il existe une classe dans laquelle au moins un élève étudie à la fois l'anglais et l'espagnol.
10. Tout élève étudiant l'espagnol étudie l'anglais, et réciproquement.
11. Un et un seul élève étudie l'anglais et l'espagnol.

Exercice 7 – Comparer les couples de propositions suivantes :

1. $\forall x, P(x) \wedge Q(x)$ et $(\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$;
2. $\forall x, P(x) \vee Q(x)$ et $(\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$;
3. $\forall x, (P \implies Q)$ et $(\forall x P) \implies (\forall x Q)$;
4. $\exists x, P \vee Q$ et $\exists x P \vee \exists x Q$;
5. $\exists x, P \wedge Q$ et $\exists x P \wedge \exists x Q$.

Exercice 8 – Soit a et n deux entiers. Montrer les assertions suivantes (on pourra considérer leur contraposée).

1. Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Si $a^n + 1$ est premier, où $n \geq 1$ et $a \geq 2$, alors n est pair.
3. Si $a^n + 1$ est premier, où $n \geq 1$ et $a \geq 2$, alors a est pair et n est une puissance de 2.

Exercice 9 – Soit n un entier strictement positif, et p_n , s'il existe, le n -ième nombre premier.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers (considérer $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, où n est...).
2. Montrer que pour tout entier n strictement positif, $p_n \leq 2^{2^n}$.

Exercice 10 – Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$ le nombre de diagonales d'un polygone à n sommets est $\frac{n(n-3)}{2}$. Proposer une autre méthode de calcul.

Exercice 11 – Montrer la formule de Moivre : pour tout entier positif n , et tout réel θ ,

$$\cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))^n.$$

Exercice 12 – Montrer que pour tout entier n positif, $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ est divisible par 9.

Exercice 13 – Montrer par récurrence les deux formules suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} = 2^n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 14 – Pour $i_1, \dots, i_n \geq 0$ tels que $i_1 + \dots + i_n = k$, on note $\binom{k}{i_1, \dots, i_n} = \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!}$. Par convention, $\binom{k}{i_1, \dots, i_n}$ est nul dans les autres cas. Montrer la formule du multinôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}, (x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + \dots + i_n = k}} \binom{k}{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Exercice 15 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\min \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right) \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \leq \max \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right).$$

Exercice 16 –

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, et $\forall n \geq 2$, $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-2}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$.
Montrer par récurrence sur n que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Soit maintenant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la même récurrence, mais dont les termes initiaux u_0 et u_1 sont des réels positifs quelconques. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. Même question pour $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0, \dots, v_{k-1} \geq 0$ et $\forall n \geq k$, $v_n = \sqrt{\frac{v_{n-k}^2 + \dots + v_{n-1}^2}{k}}$.

Exercice 17 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $u_n = \sqrt{\frac{u_0^2 + \dots + u_{n-1}^2}{2n}}$.

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle?
3. Établir une relation de récurrence d'ordre 1 satisfaite par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$.
5. En déduire l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \exp \left(-\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right)$.

Exercice 18 – Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right) \sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}$.

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

Exercice 19 – Soit H_n la suite harmonique, définie par :

$$H_0 = 0, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{m+1} = \frac{1}{m+1} \binom{k}{m}$.

On rappelle que par convention, $\binom{n}{p}$ est nul si $p > n$.

2. Montrer chacune des égalités suivantes :

$$(a) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=1}^n \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right),$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n,$$

$$(c) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n.$$

Exercice 20 – (Multiplication par la méthode dite « du paysan russe ») On propose l'algorithme suivant. Soit m et n deux entiers. Sur une première ligne, on écrit côte à côte m et n . Sur la ligne suivante, on écrit le quotient de la division euclidienne de m par 2 (on oublie donc les décimales) sous la valeur de m , et on écrit $2n$ sous la valeur de n . On continue ainsi : dans la première colonne, on passe d'une ligne à l'autre en divisant par 2, dans la deuxième colonne, on multiplie par 2. On s'arrête lorsqu'on a obtenu 1 dans la première colonne. On barre ensuite toutes les lignes pour lesquelles le nombre situé dans la première colonne est pair. On fait enfin la somme des nombres situés dans la deuxième colonne et non barrés. On note $\varphi(m, n)$ l'entier obtenu. Montrer que $\varphi(m, n) = m \cdot n$. Un exemple de mise en application de cet algorithme pour calculer $11 \cdot 17$:

11	17
5	34
2	68
1	136
	187

Exercice 21 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée par ses deux termes initiaux u_0 et u_1 , et la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels fixés.

1. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b$ admet deux racines distinctes r et s dans $\mathbb{C}$.
 - (a) Montrer que pour tous complexes λ et μ , la suite complexe $(\lambda r^n + \mu s^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Montrer qu'il existe un et un seul couple (λ, μ) de nombres complexes tels que $\lambda + \mu = u_0$ et $\lambda r + \mu s = u_1$. Montrer qu'alors, pour tout $n \geq 0$, $u_n = \lambda r^n + \mu s^n$.
 - (c) Soit $(u_n)_s u$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .
 - (d) Même question avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).
 - (e) Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
2. On suppose que l'équation $x^2 - ax - b$ admet une racine double r .
 - (a) Montrer que pour tous complexes λ et μ , la suite complexe $((\lambda + \mu n)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Montrer qu'il existe un et un seul couple (λ, μ) de nombres complexes tels que $\lambda = u_0$ et $(\lambda + \mu)r = u_1$. Montrer qu'alors, pour tout $n \geq 0$, $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$.
 - (c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .
 - (d) Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.