

Algèbre 2 – Ensembles et applications

Exercice 1 – Soit $A, B \subset E$, et $A * B = \complement_E A \cap \complement_E B$. Exprimer $\complement_E A$, $A \cup B$ et $A \cap B$ à l'aide de l'opération $*$.

Exercice 2 – Montrer que $X \subset Y$ si et seulement s'il existe Z tel que $Z \cap X \subset Z \cap Y$ et $Z \cup X \subset Z \cup Y$.

Exercice 3 – Montrer que :

$$\begin{array}{ll} a) X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z); & b) X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z); \\ c) X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z); & d) (X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z). \end{array}$$

Exercice 4 – Soit $A_1, \dots, A_k$ des parties d'un ensemble. Montrer :

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots \cup (A_{k-1} - A_k) \cup (A_k - A_1) \cup (A_1 \cap \dots \cap A_k).$$

Exercice 5 – Soit A, B, C, D des ensembles. Construire une bijection entre $C^{A \times B}$ et $(C^A)^B$ et une injection de $C^A \times D^B$ dans $(C \times D)^{A \times B}$.

Exercice 6 – Construire une surjection de $\mathbb{N}$ sur lui-même pour laquelle chaque entier possède exactement p antécédents ($p \geq 1$ fixé). En construire une pour laquelle chaque entier possède une infinité d'antécédents.

Exercice 7 – Soit f une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $f(n) \leq n$. Montrer que $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Même question en supposant que f est une surjection vérifiant $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 – Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $M \geq 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $f(n) \geq M$. Cette propriété revient à dire que la limite de $f(n)$ lorsque n tend vers l'infini est $+\infty$. Cette propriété est-elle vérifiée pour une injection ? une surjection ?

Exercice 9 – Soit $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions définies par :

$$f(n) = n + 1 \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelles de f et g . Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 10 – Soit E un ensemble, et $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 11 – Soit E un ensemble, et $p : E \rightarrow E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer si p est surjective ou injective, alors $p = \text{id}_E$.

Exercice 12 – Soit $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, alors f , g et h sont toutes trois des bijections.

Exercice 13 –

1. Soit E, F, G trois ensembles tels que $E \neq \emptyset$, et soit $f : F \rightarrow G$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall g, h \in F^E, (f \circ g = f \circ h \implies g = h).$$

2. Soit F, G, H trois ensembles tels que $|H| \geq 2$, et soit $f : F \rightarrow G$. Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall g, h \in H^G, (g \circ f = h \circ f \implies g = h).$$

Exercice 14 – Soit $f \in F^E$, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de F . Montrer les relations :

$$\begin{array}{ll} a) f \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) & b) f \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) \\ c) f^{-1} \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) & d) f^{-1} \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j) \end{array}$$

Exemple d'inclusion stricte en b.

Exercice 15 – Soit E un ensemble, et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ll} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective).

Exercice 16 – Soit E un ensemble non vide, et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ll} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto (X \cup A, X \cup B). \end{array}$$

1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 17 – Factorisation d'une application.

1. Soit $f : F \longrightarrow E$ et $g : G \longrightarrow E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \longrightarrow F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si $g(G) \subset f(F)$.
À quelle condition h est-elle unique?
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \longrightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall x, y \in E, (f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y))$.
À quelle condition h est-elle unique?

Exercice 18 – Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une bijection. La conjugaison par f est l'application :

$$\begin{array}{ll} C_f : E^E & \longrightarrow E^E \\ \varphi & \longmapsto f \circ \varphi \circ f^{-1}. \end{array}$$

1. Montrer que C_f est une bijection de E^E dans lui-même.
2. Étant donné une deuxième bijection g de E dans E , simplifier $C_f \circ C_g$.
3. Étant donné deux applications φ et ψ de E dans E , simplifier $C_f(\varphi) \circ C_f(\psi)$.
4. Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ les sous-ensembles de E^E constitués des injections et des surjections. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ sont invariants par C_f .
5. Si φ est bijective, que dire de $(C_f(\varphi))^{-1}$?