LYCÉE CARNOT
ECS 4 – Mathématiques
A. TROESCH

Décembre 2006

Algèbre 6 – Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 – Pour chacune des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$, dire si elles sont libres, génératrices ; lesquelles sont des bases ?

1. $((1,3,-2),(2,1,0))$
2. $((1,5,6),(2,3,0),(3,8,6),(1,0,0))$
3. $((2,2,1),(1,1,2),(1,1,1))$
4. $((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$.

Exercice 2 – On considère dans un $\mathbb{K}$-ev E les deux système de vecteurs $S=(u_1,\dots,u_n)$ et $S'=(u_1,\dots u_p)$ extrait de S. En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer que si $\mathrm{rg}(S)=r$, alors $\mathrm{rg}(S')\geqslant r+p-n$.

Exercice 3 – Soit E un espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p<n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 4 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F+\dim G>n$. Montrer que $F\cap G\neq\{0\}$.

Exercice 5 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que tout système libre de E a au plus n éléments. Montrer que E est de dimension finie, et que $\dim E\leqslant n$.

Exercice 6 – **Autour de l'espace vectoriel des polynômes**

1. Justifier que l'ensemble des polynômes de degré au plus n, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. (a) Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de polynômes tels que P_k soit de degré k. Montrer que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) En déduire que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et tout $a\in\mathbb{R}$, il existe d'uniques réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tels que :
   $$P=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(X-a)^k.$$
   Que reconnaissez-vous ?
3. (a) Soit $r_1,\dots,r_k\in\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des polynômes admettant $r_1,\dots,r_k$ comme racines (il peut y en avoir d'autres bien sûr) est un espace vectoriel, et en trouver une base.
   (On pourra constater qu'un tel polynôme s'écrit toujours PQ pour un polynôme déterminé P, et un polynôme quelconque Q, puis prendre une base dans laquelle on écrit Q)

   (b) Soit $n\geqslant k$. Montrer que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant $r_1,\dots,r_k$ comme racines est un espace vectoriel, et en trouver une base et sa dimension.

   (c) La question a est-elle encore vrai si $r_1,\dots,r_k$ sont dans $\mathbb{C}$? Si oui, trouver une base de cet espace dans le cas d'une racine, égale à i.
   (On se souviendra des propriétés des racines complexes de polynômes à coefficients réels)

   (d) On suppose qu'aucun des r_i n'est conjugué à un autre. Soit $n\geqslant 2k$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant $r_1,\dots,r_k$ pour racines
4. Soit $r\in\mathbb{R}$.

   (a) Soit E l'ensemble des polynômes dont r est racine simple. E est-il un espace vectoriel ? (Justifiez votre réponse).

   (b) Soit F l'ensemble des polynômes dont r est la seule racine réelle (simple ou multiple). F est-t-il un espace vectoriel ? (Justifiez votre réponse)
5. L'ensemble des polynômes unitaires est-il un espace vectoriel (justifiez votre réponse).
6. La famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_n[X]$?