

Algèbre 8 – Matrices

Exercice 1 – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Exprimer la matrice de f :

- relativement à la base canonique et à la base $((1, 1), (1, -1))$;
- relativement à la base $((1, 1), (1, -1))$ et à la base canonique;
- relativement à la base canonique et à la base $((1, -1), (1, 1))$;
- dans la base $((1, 2), (-1, 2))$;
- dans une base dans laquelle sa matrice est diagonale; en déduire A^n .

Exercice 2 –

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

- Même question avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Soit $a \in \mathbb{R}$, et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A_n^k pour tout entier k .
- Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4 – Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible. Calculer son inverse.

Exercice 5 – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible. Calculer A^{-1} . En déduire B^{-1} , C^{-1} , D^{-1} .

Exercice 6 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée uniquement de 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Soit a et b deux réels et $B = aI_n + bA$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que B soit inversible. Calculer B^p . Montrer que la formule se généralise pour p négatif.

Exercice 7 – Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'aucune des matrices n'est nulle, et que $ABC = 0$. Montrer qu'au moins deux des trois matrices A, B, C sont non inversibles.

Exercice 8 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Exercice 9 – (utilise le théorème du rang) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, et $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Déterminer $\text{rg}(f)$, $\text{rg}(f^2)$, $\dim(\text{Ker}(f))$, $\dim(\text{Ker}(f^2))$, et montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à A .

1. Déterminer $\text{rg}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f^2)$ et une base de $\text{Ker}(f - \text{id})^2$. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$, calculer P^{-1} .
5. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n .

Exercice 12 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Deux matrices semblables ont même trace. (On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$)

Exercice 13 – (Oral HEC) – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

1. Trouver une décomposition LU de A (c'est-à-dire un produit d'une matrice triangulaire inférieure, et d'une matrice triangulaire supérieure; pensez à "lower", "upper").
2. La décomposition LU est-elle unique ?
3. A est-elle inversible ?

$$4. \text{ Résoudre le système : } \begin{cases} \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \sum_{j=1}^{i-1} jx_j + i \sum_{j=i}^n x_j = \frac{2n-i+1}{2} \cdot i \\ \sum_{j=1}^n x_j = n \end{cases}$$

Exercice 14 – (Oral HEC) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Déterminer en fonction de ω_n les racines complexes de $z^n = 1$.
2. (a) Soit p un entier relatif. Donner la valeur de $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp}$.
(b) Soient p et q deux entiers relatifs. Calculer : $T_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp} \omega_n^{kq}$ et $V_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp} \omega_n^{-kq}$.
3. Soit A_n la matrice $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = \omega_n^{(i-1)(j-1)}$.
(a) Calculer l'inverse de A_3 .
(b) Soit $\overline{A_n}$ la matrice $(\overline{a_{i,j}})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Effectuer le produit $A_n \overline{A_n}$.
(c) En déduire l'inverse de A_n .