

Algèbre 9 – Pivot de Gauss

Exercice 1 – Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer un inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – Les familles suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^4$:

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 – Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathbb{R}^5$, et les compléter en une base. Décrire un supplémentaire des espaces engendrés par ces familles.

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 – Extraire une famille libre de cardinal maximal des familles suivantes ; sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^4$?

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 – Trouver un supplémentaire des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^5$:

$$1. \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad 2. \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 7 – Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}
 1. \begin{cases} x - y + 3z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 0 \end{cases} & \quad 2. \begin{cases} x + y + 2z - 5t &= 1 \\ x - 2y + t &= 0 \\ 2x - z - t &= 2 \end{cases} & \quad 3. \begin{cases} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 3x + 4y &= 3 \end{cases} \\
 4. \begin{cases} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 2 \\ 3x + 4y &= 1 \end{cases} & \quad 5. \begin{cases} x + 2y + z + 2t + 3u &= 2 \\ x + 3y + z + 2t &= 1 \\ y - 3u &= -1 \end{cases} & \quad 6. \begin{cases} x + 2y + z + 2t + 3u &= 2 \\ x + 3y + z + 2t &= 1 \\ y - 3u &= 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 8 – Déterminer l'ensemble des solutions du système suivant, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3z &= 5 \\ x - 3y + z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= m \end{cases}$$

Exercice 9 – Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ constitué des 5-uplets (x, y, z, t, u) solutions du système :

$$\begin{cases} x - 2y + u = 0 \\ 5x + t - u = 0 \\ 13x + 4y + 3t - 5u = 0 \end{cases}$$

Déterminer une base de F , et un sous-espace vectoriel supplémentaire de F .

Exercice 10 – Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée de 1 en toutes ses entrées. Soit $A = J + mI$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer un polynôme annulant A .
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ? Déterminer son inverse.
3. Discuter et résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z + t = a \\ x + my + z + t = b \\ x + y + mz + t = c \\ x + y + z + mt = d \end{cases}$$

Exercice 11 – Trouver suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$ l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} ax_1 &= x_2 + 1 \\ ax_2 &= x_3 + 1 \\ \vdots & \\ ax_{n-1} &= x_n + 1 \\ ax_n &= x_1 + 1 \end{cases}$$