

Analyse 12 – Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1 – Domaine de définition et existence d’une limite en $(0, 0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & b) f(x, y) &= \frac{(1 + x^2 + y^2) \sin y}{y} & c) f(x, y) &= \frac{xy}{x + y} \\ d) f(x, y) &= \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y} & e) f(x, y) &= x^y & f) f(x, y) &= \frac{x^a y^b}{x^c + y^d} \\ g) f(x, y) &= \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} & h) f(x, y) &= x \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & i) f(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

Exercice 2 – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous. Étudier l’existence et la continuité des dérivées partielles.

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} & b) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\ c) f(x, y) &= \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y; \end{cases} & d) f(x, y) &= \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\ e) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} & f) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3 – Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{2x}{y} & \text{si } |x| \leq y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ y & \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu’il n’existe aucun $(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, x', y) \in]-\alpha, \alpha[\times]-a, a[\times]-\beta, \beta[, \quad |f(x, y) - f(x', y)| \leq A|x - x'|.$$

Exercice 4 – Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f_{x,y} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$, et on note :

$$F(x, y) = \sup_{t \in [-1, 1]} f_{x,y}(t).$$

1. Calculer $F(x, y)$.
2. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

Le but de l’exercice est de montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la limite de g lorsque (x, y) tend vers (x_0, x_0) , avec $x \neq y$, est $f'(x_0)$ (ind. : TAF).
En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, exprimer $\frac{g(x_0 + h, x_0) - g(x_0, x_0)}{h}$ en fonction de f .
Déterminer la limite de cette expression à l’aide d’une formule du cours.

3. Pour $x \neq y$ calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ en fonction de (x, y) , et déterminer sa limite.
En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 – Plan tangent en $(0, 0)$ des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité) :

1. $f(x, y) = 1 + x - \sqrt{1 + x - y}$
2. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2 + x + \ln(1 + y)}}$
3. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(x + y)}}$
4. $f(x, y) = \frac{\sin(x + y) - \sin x - \sin y}{xy}$

Exercice 7 – Déterminer les éventuels extrema locaux et globaux de f pour les fonctions définies par :

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x^3$
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 8)(x^2 + y^2)$
3. $f(x, y) = e^{x^2 y^2}$
4. $f(x, y) = x \sin y$

Exercice 8 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ admet un minimum local en $(0, 0)$.
2. Est-ce que f admet un minimum local en $(0, 0)$?

Conclusion : une fonction peut admettre un minimum local en un point sur toute direction, sans que ce soit un minimum local sur un voisinage dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 – Le point $(0, 0)$ est-il un extremum local des fonctions f définies au voisinage de $(0, 0)$ par :

1. $f(x, y) = \frac{\sqrt{1+x}}{1+y}$
2. $f(x, y) = \sin(xy) + e^{-xy}$
3. $f(x, y) = y^6 \operatorname{Arctan}(x^2 y) + \sin(x^6 y^6) - x^2 y^7 - \frac{1}{3} x^6 y^9$.
4. $f(x, y) = \frac{1 - xy + \ln(1 + xy)}{\cos xy}$

Exercice 10 – Relation d'Euler

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

(on dit que f est homogène de degré α).

Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$.

2. Réciproquement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\exists \alpha \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Montrer que f est homogène de degré α .

3. Trouver, à l'aide de ce qui précède, toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$$

Bonnes vacances