

Analyse 2 – Convergence de suites

Exercice 1 – Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$ et sa limite, où $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$.

Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

Même question avec $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$

Exercice 2 – Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$;
4. $u_n = \frac{(\ln n)(\sin n)}{n}$
7. $u_n = \frac{e^{\frac{n^2+1}{n+2}}}{n \ln n}$
2. $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$;
5. $u_n = (n^2 + 1)e^{-\sqrt{n}}$
8. $u_n = e^{\frac{n^2+2n}{n^3+2}}$
3. $u_n = \frac{n + (-1)^n}{3n + 1}$.
6. $u_n = \sqrt{\sin \frac{1}{n} \ln(n^3 + n + 1)}$
9. $u_n = \ln(\sin(\pi \cos(e^{-n})))$

Exercice 3 –

1. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ (fini ou infini), alors la suite $v_n = u_{n+1}$ converge aussi vers ℓ .
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, quelle est sa limite ?
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 1}$. Cette suite converge-t-elle ?

Exercice 4 –

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ (fini ou infini), et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ convergeant vers $+\infty$. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = u_{v_n}$. Étudier la convergence de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ (fini ou infini), et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que $v_n = u_{f(n)}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire s'il existe un entier N tel que $u_N = u_{N+1} = \dots$.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $(u_n^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

Exercice 7 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\left(\frac{a^n}{n^b}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si $a < 1$; vers $+\infty$ si $a > 1$. Cas $a = 1$?
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 8 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.
2. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel fini ℓ . Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit ou un plus grand élément. Décrire les suites convergentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas à la fois un plus petit et un plus grand élément.
3. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, et qu'elle tend vers 0. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq u_p$.

Exercice 9 – Montrer que $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 10 – Montrer que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (raisonner par l'absurde).

Exercice 11 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites telles que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , et $\left(\frac{v_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ' , avec $\ell > \ell'$. Montrer que $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$.

Exercice 12 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que pour tout $n \geq 1$, $2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 13 –

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{2n} = \frac{2n^2+1}{2n^2+2}$ et $u_{2n+1} = e^{\sin \frac{1}{n}}$. Déterminer la limite, si elle existe, de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Même question avec $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{3n} = \ln n$, $v_{3n+1} = n^3$ et $v_{3n+2} = e^n$.

Exercice 14 – Les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par les formules suivantes sont-elles convergentes :

$$a) u_n = \cos \frac{1}{2} \times \cos \frac{1}{4} \times \dots \times \cos \frac{1}{2^n}; \quad b) u_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^{2^k})$$

Exercice 15 – Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites extraites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$. On ne demande pas de déterminer la limite.

Exercice 16 – (Moyenne de Cesaro)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)$

1. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend aussi vers ℓ .
2. Montrer que si $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ .
3. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , alors $\left(u_n^{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ .
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n}$.

Exercice 17 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x + 4}$ est croissante sur son domaine de définition.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Étudier son sens de variation suivant la valeur de a .
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 18 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \sqrt{12}$.
2. On considère les deux suites extraites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones. Quel est leur sens de variation ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq u_1 \leq 4$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_n - u_{n-1}|$.
5. Montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 19 – Étudier la convergence des suites définies par les récurrences ci-dessous :

- (a) $u_0 \geq \frac{-3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ (b) $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2}$ (c) $u_0 \neq 1$, $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$
- (d) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$ (e) $u_0 \neq -5$, $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$ (f) $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 20 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie ℓ , soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_{2^n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{2}$. Quelle est la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 21 – (Algorithme de Héron) Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a , u_0 et n .
4. On prend $u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a , u_1 et n .

Exercice 22 – On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$, et la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 0$ et les relations de récurrence, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+2} = g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.
2. Étudier le sens de variation de $g \circ f$ sur son domaine de définition.
3. En déduire que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer son sens de variation.
4. Montrer que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie, et déterminer cette limite ℓ .
5. Vérifier que ℓ est un point fixe de f et de g .
6. Exprimer $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$, f et g . En déduire que ces trois suites convergent vers des limites que l'on déterminera. Préciser l'éventuelle monotonie de ces suites.
7. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?