

### Analyse 3 – Équivalents – Comparaisons asymptotiques

**Exercice 1** – Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\left(\frac{E(nx)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. Quelle est sa limite? Montrer que la convergence est en  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Exercice 2** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ . Montrer que  $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Exercice 3** – Soit  $a \in ]1, +\infty[$ , et soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a}$ .

1. Montrer que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
2. Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = S_{2^n}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n(a-1)}}$ .  
En déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, puis que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Soit  $\ell$  la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que la convergence est en  $O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$ , c'est-à-dire :  $|S_n - \ell| = O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$ .

**Exercice 4** – Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , et soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$ .

1. Justifier que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. Déterminer sa limite et estimer la vitesse de convergence.

**Exercice 5** – Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ , et  $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ , et  $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$ .

1. Montrer que pour tout  $n > 0$ ,  $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ .
2. Montrer que pour tout  $n > 0$ ,  $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n$ .
3. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent. Déterminer leurs limites, et montrer que les deux convergences sont en  $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .
4. En déduire un équivalent simple de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  en  $+\infty$ .
5. Donner une expression à  $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  près de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 6** – Déterminer un équivalent simple de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans les cas suivants :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ;
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(1 + \sqrt{n^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;
3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = e^{n^2+n+1}$ ;
4.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \ln(n^2 + n + 1)$ ;
5.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{2}{n}}}{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n}}$ ;
6.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sin\left(\cos\left(\frac{1}{\ln n}\right) - e^{\frac{1}{n}}\right)$ ;
7.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(\cos\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^5 - 1$ .

**Exercice 7** – Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer un équivalent simple de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ . On discutera selon les valeurs de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 8** – Déterminer un équivalent simple des suites définies par les récurrences suivantes :

1.  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n + 4$ ;
2.  $v_0 = 1$ ,  $v_1 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$ ;
3.  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+3} = 6w_{n+2} - 11w_{n+1} + 6w_n$ ;
4.  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+2} = \sqrt{2} \cdot x_{n+1} - \frac{x_n}{2}$ .

**Exercice 9** – Déterminer, si elles existent, les limites des suites  $(u_n)$  ci-dessous :

- a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ;
- b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(\frac{n}{n-a}\right)^n$ ,  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ ;
- c)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $a \neq b$ ;
- d)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$ .

**Exercice 10** – Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ , et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{a}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}$ . Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 11** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = a > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
2. Soit, pour tout  $n \geq 1$ ,  $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$ . Calculer  $w_n$  pour tout  $n \geq 1$ .
3. En calculant  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k$  de deux manières différentes, déterminer la limite de  $(nu_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ , et en déduire un équivalent simple de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 12** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .
2. Étudier les variations de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a les deux encadrements suivants :

$$2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1} \quad \text{puis} \quad 2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1.$$

4. Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 - \frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1 - \frac{1}{u_n^2}$ .
6. En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 13** – Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \quad v_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \quad w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

1. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont décroissantes et minorées par 0.
2. (a) Montrer que pour tout  $t \in ]-1, +\infty[$ ,  $\frac{t}{t+1} < \frac{t+1}{t+2}$ .  
(b) En considérant  $u_n^2$ , et en remarquant que  $v_n = \frac{1}{(2n+1)u_n}$ , établir alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n \leq \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}.$$

3. (a) Montrer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et qu'elle converge vers un réel  $\lambda \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ .  
(b) En déduire que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda v_n$ .
4. En considérant la suite  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , établir enfin que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\lambda}{2n}} \text{ et } v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda n}}.$$

**Exercice 14** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit le polynôme  $P_n$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'équation  $P_n(x) = 0$  admet une unique solution  $x_n$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , et que  $0 < x_n \leq 1$ .
2. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. On note  $\ell$  sa limite.
3. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^{n+1} = 0$ , puis que  $\ell = \frac{1}{2}$ .
4. Montrer que  $x_n - \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Exercice 15** – (Oral HEC 1991) – Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x \in [0, +\infty[$  par  $f_n(x) = x^n - nx + 1$ .

1. Prouver l'existence de deux racines  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  de  $f_n$  telles que  $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$ .
2. Montrer que  $(\alpha_n)_{n \geq 3}$  converge et calculer sa limite.
3. Montrer que  $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
4. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq n$ .  
(b) En déduire un encadrement de  $(\beta_n)_{n \geq 3}$  et sa limite  $\ell$ .  
(c) En remarquant que pour tout  $n \geq 3$ ,  $n \ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$ , trouver un équivalent de  $\ln(\beta_n)$ , et en déduire que  $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$ .