Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Mai 2007

Analyse 6 – Développements limités

Exercice 1 –

1. Soit f, une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$ si et seulement si $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$.
2. Soit f la fonction définie par $f(0)=0$ et $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ si $x\neq 0$. Montrer que pour tout n, f admet un développement limité à l'ordre n en 0, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 2 – Calculer les développements limités en 0 à l'ordre indiqué de :

a) $\sin x\ \cos 2x$ (ordre 4) *b)* $\mathrm{e}^{\sin 2x}$ (ordre 5) *c)* $\ln(1+\sin x)$ (ordre 4)

d) $\mathrm{e}^{\cos x}$ (ordre 4) *e)* $\sqrt{1+\cos x}$ (ordre 4) *f)* $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2(1-x)}{1+4x}\right)$ (ordre 8)

g) $\dfrac{x^3}{\mathrm{sh}^3(x)}$ (ordre 5) *h)* $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ (ordre 5) *i)* $\dfrac{1}{\cos x}$ (ordre 6)

j) $\tan(\pi\mathrm{e}^x)$ (ordre 4) *k)* $\mathrm{Arcsin}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ (ordre 4) *l)* $(1-x\sin x)^{\frac{1}{x}}$ (ordre 5)

m) $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (ordre 3) *n)* $\mathrm{e}^{\sqrt{4+x}}$ (ordre 4) *o)* $\mathrm{Arcsin}(\mathrm{Arcsin}x)$ (ordre 9)

p) $\sqrt{1+x-x^2}-(\cos x)^{\frac{1}{3}}$ (ordre 6) *q)* $\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ (ordre 7) *r)* $\dfrac{\cos x-\cos 5x}{\sin x-\sin 5x}$ (ordre 5)

s) $\mathrm{e}^{\frac{\cos x}{\mathrm{ch} x}}$ (ordre 4) *t)* $\dfrac{1}{x}\mathrm{Arccos}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ (ordre 3) *u)* $\dfrac{1}{x}\mathrm{Arccos}\dfrac{\sin x}{x}$ (ordre 5)

v) $\mathrm{ch}(\sin x)-\cos(\mathrm{sh} x)$ (ordre 8) *w)* $\sin(x-\mathrm{Arctan}\, x)$ (ordre 11) *x)* $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ (ordre 3)

Exercice 3 – Calculer les limites en x_0 des fonctions suivantes :

a) $\dfrac{\tan^n x-1}{2\sin^2 x-1}$ $(x_0=\frac{\pi}{4})$ *b)* $\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\ln\sin x}$ $(x_0=\frac{\pi}{2})$ *c)* $\dfrac{\sin^{p+q}x-1}{(\sin^p x-1)(\sin^q x-1)}$ $(x_0=\frac{\pi}{2})$

d) $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(x_0=0)$ *e)* $x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x_0=+\infty)$ *f)* $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$ $(x_0=0)$

g) $\dfrac{\sin x(\tan x-x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$ $(x_0=0)$ *h)* $\dfrac{\sin x-\tan x}{1-x+\ln(1+x)-\cos x}$ $(x_0=0)$ *i)* $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$ $(x_0=2)$

Exercice 4 – Déterminer un équivalent simple en x_0 de :

a) $\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}-(\mathrm{e}-1)$ $(x_0=1)$ *b)* $\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}$ $(x_0=\mathrm{e})$ *c)* $\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}$ $(x_0=0)$

d) $x^x-\sin x^{\sin x}$ $(x_0=0^+)$ *e)* $\dfrac{(\tan x)^x-x^{\tan x}}{(\mathrm{th} x)^x-x^{\mathrm{th} x}}$ $(x_0=0^+)$ *f)* $\mathrm{sh}(\sin x)-\sin(\mathrm{sh} x)$ $(x_0=0)$

g) $\mathrm{Arctan}(x-x\cos x)$ $(x_0=0)$ *h)* $\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}-\dfrac{\pi}{2}$ $(x_0=0)$

Exercice 5 – Soit $f(x)=\left[\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]\sqrt{x^2+1}$

1. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une asymptote au graphe de f et la position relative des deux courbes au voisinage de l'infini.
3. Mêmes questions avec $f(x)=(x+1)^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.