

Analyse 9 – Convexité – Fonctions réciproques

Convexité

Exercice 1 – (Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques)

1. En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\ln x$, montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geq n \ln \frac{n}{e}$.
(b) En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{e}{n^2} \sum_{k=1}^n k x_k.$$

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite (finie ou $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si cette limite ℓ est finie, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (On pourra considérer l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.)

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante. Est-ce encore vrai si f est définie sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4 –

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications convexes; on suppose que g est croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice 5 – (Inégalités de Hölder et de Minkowski) – Indications à rajouter Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En considérant la fonction $\ln$, montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. En déduire l'inégalité de Hölder, pour $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra poser $a = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}}$ et $b = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}}$.

Lorsque $p = q = 2$, il s'agit de l'inégalité de Schwarz.

3. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

4. Montrer directement l'inégalité de Minkowski en s'aidant de la fonction $x \mapsto (1 - x^{\frac{1}{p}})^p$.

Exercice 6 –

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, :

$$\left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{\frac{1}{n}}$$

Fonctions réciproques

Exercice 7 – Étude et graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin} \sin x$.

Exercice 8 –

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{Arccos} \cos x = x_0$.
2. Même question avec $\operatorname{Arccos} \cos x = x$.

Exercice 9 – Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f , et étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Calculer la dérivée de f , et en déduire une expression simplifiée de f .

Exercice 10 – En vous inspirant de l'exercice précédent, étudier les fonctions définies sur leur domaine par les égalités suivantes et simplifier leur expression.

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \right) & b) f(x) &= 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \operatorname{Arcsin}(x) \\ c) f(x) &= \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \frac{x}{2} & d) f(x) &= \operatorname{Arccos} \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 11 – Résoudre l'équation $2\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ (on pourra faire un changement de variables).

Exercice 12 – Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes en x_0 :

$$a) f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - \frac{\pi}{2}, x_0 = 1 \quad b) f(x) = \operatorname{Arccos}(x) - \pi, x_0 = 1 \quad c) f(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}, x_0 = +\infty$$

Exercice 13 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\ln x = \operatorname{Arctan} x + n\pi$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que la suite $\left(\ln \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et préciser sa limite.
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \frac{1}{x_0} + \dots + \frac{1}{x_n}$ converge.

Exercice 14 – On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que sh admet une fonction réciproque Argsh dont on déterminera la dérivée. Même question avec $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.