

Analyse 2 – Convergence de suites

Exercice 1 –

1. Soit $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Explicitons-la. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - c$, où c est un certain réel. On va choisir c de sorte que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite géométrique. Pour cela, exprimons la relation de récurrence satisfaite par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - c = \frac{1}{2}u_n + 5 - c = \frac{1}{2}(v_n + c) + 5 - c = \frac{1}{2}v_n + 5 - \frac{1}{2}c.$$

Pour que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique, il suffit donc que $5 - \frac{1}{2}c = 0$, donc $c = 10$. Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{v_0}{2^n} = -\frac{4}{2^n} = -\frac{1}{2^{n-2}}, \quad \text{puis:} \quad u_n = -\frac{1}{2^{n-2}} + 10.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left(-4 \cdot \frac{1}{2^k} + 10 \right) = -4 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + 10(n+1) = -8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + 10(n+1).$$

2. Soit $u_0 = 1, u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$. Explicitons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le polynôme caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre 2 est P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

Ainsi, 2 est racine double de P , donc il existe des réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)2^n.$$

Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales :

$$u_0 = 1 = \mu \quad \text{et} \quad u_1 = 2 = (\lambda + \mu) \cdot 2,$$

d'où $\mu = 1$ et $\lambda = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

3. Soit $u_0 = 1, u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.

Le polynôme caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre 2 est P donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Ainsi, P admet deux racines distinctes 2 et -3 , donc il existe des réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n.$$

Déterminons λ et μ à l'aide des conditions initiales :

$$u_0 = 1 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad u_1 = 2 = 2\lambda - 3\mu,$$

d'où

$$\lambda = 1 - \mu \quad \text{et} \quad 2 = 2 - 2\mu - 3\mu \quad \text{soit:} \quad \mu = 0 \quad \text{puis:} \quad \lambda = 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 4 –

1. Un peu d'intuition est nécessaire pour deviner le résultat : lorsque n tend vers $+\infty$, (v_n) tend vers $+\infty$; il est donc probable que u_{v_n} ait la même limite que u_n . Montrons cela. On peut séparer les cas où ℓ est infini et ℓ fini, ou alors utiliser la définition par voisinage pour avoir une démonstration commune aux deux cas.

Soit V un voisinage de ℓ . Alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V.$$

Soit un tel N . Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$,

$$\exists N' \in \mathbb{N} \forall n \geq N', v_n \geq N.$$

Ainsi :

$$\forall n \geq N', v_n \geq N, \text{ donc: } u_{v_n} \in V,$$

d'après la première expression.

Ainsi, $(u_{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

2. Il suffit de montrer que $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Soit donc $A > 0$. Considérons $f^{-1}([0, E(A)])$. Comme f est bijective, cet ensemble a le même cardinal que $[0, E(A)]$. C'est donc un ensemble fini. Il admet par conséquent un plus grand élément n_0 . Ainsi :

$$\forall n \geq n_0 + 1, n \notin f^{-1}([0, E(A)]), \quad \text{donc: } f(n) \notin [0, E(A)], \quad \text{donc: } f(n) \geq E(A) + 1 > A.$$

On en déduit que $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

D'après la question 1, la limite de $(u_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la même que celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 8 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $A = u_0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$. Alors, $E = \{u_n, \text{ tq } u_n \leq A, n \in \mathbb{N}\}$ est fini, car $E \subset [1, n_0]$. En effet pour tout $n > n_0$, $u_n > A$, donc $u_n \notin E$. De plus E est non vide, puisque $u_0 \in E$. Par conséquent, E admet un plus petit élément u_k . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- soit $u_n \in E$, et donc $u_k \leq u_n$ par définition de u_k ;
- soit $u_n \notin E$, et donc $u_n > A \leq u_k$.

Ainsi, u_k est un minorant, et donc le plus petit élément, de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

2. Si $(u_n)_s u$ est constante, $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un singleton, donc admet à la fois un plus petit et un plus grand élément.

Supposons donc que u_n est non constante. Il existe donc k tel que $u_k \neq \ell$. Supposons que $u_k > \ell$ (le cas $u_k < \ell$ se démontre de la même façon). Alors soit $\varepsilon = u_k - \ell$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < \ell + \varepsilon = u_k$. Soit $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}, \text{ td } u_n \geq u_k\}$. D'après ce qui précède, $E \subset [0, N]$, et est donc fini. De plus, $u_k \in E$. Donc E admet un élément maximum. Comme dans la question précédente, cet élément est aussi l'élément maximum de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour ne pas pouvoir faire ce raisonnement pour l'élément maximum, il faudrait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq \ell$. Si cela est vérifié, et qu'il existe k tel que $u_k = \ell$, alors u_k est clairement l'élément maximum de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, pour qu'il n'existe pas d'élément maximum, il faut donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.

Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$, alors ℓ est la borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. En effet, c'est un majorant, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \ell - \varepsilon$. En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell - \varepsilon$. D'après la caractérisation par epsilon des bornes supérieures, ℓ est la borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Comme $\ell \notin \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, cet ensemble n'admet pas d'élément maximum.

Ainsi, les suites convergentes telles que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de maximum (et admet donc un minimum) sont les suites convergeant vers leur limite par valeurs strictement inférieures. De même, les suites convergentes telles que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de minimum (et admet donc un maximum) sont les suites convergeant vers leur limite par valeurs strictement supérieures.

3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à termes positifs, on obtient par le raisonnement précédent l'existence d'un maximum de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit p_1 tel que u_{p_1} soit ce maximum. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{p_1}$, et en particulier, pour tout $n \geq p_1$, $u_n \leq u_{p_1}$.

Alors $\{u_n, n > p_1\}$ admet pour la même raison un maximum (ce sont les termes de la suite définie par $v_n = u_{n+p_1+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut appliquer le résultat précédent à cette suite). Soit p_2 tel que u_{p_2} réalise ce maximum. Alors, de même que précédemment, pour tout $n \geq p_2$, $u_n \leq u_{p_2}$. De plus $p_2 > p_1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons construits $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, et pour tout $n \geq p_i$, $u_n \leq u_{p_i}$. Alors $\{u_n, n > p_k\}$ admet pour la même raison un maximum. Soit p_{k+1} tel que $u_{p_{k+1}}$ réalise ce maximum. Alors $p_{k+1} > p_k$, et pour tout $n \geq p_{k+1}$, $u_n \leq u_{p_{k+1}}$.

D'après le principe de récurrence, on a donc construit une infinité d'entiers p_i tels que pour tout $n \geq p_i$, $u_n \leq u_{p_i}$.

Exercice 10 – Supposons que $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers un réel ℓ . Alors $(\sin(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ également, donc $(\sin 1 \cos n + \sin n \cos 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Comme $(\sin n)$ converge, $(\sin n \cos 1)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi, donc $(\sin 1 \cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Et comme $\sin 1$ est une constante non nulle, $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers ℓ' . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sin(n+1) = \sin 1 \cos n + \sin n \cos 1 \quad \text{et} \quad \cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1.$$

Ainsi, en passant à la limite dans ces égalités :

$$\ell = \ell' \sin 1 + \ell \cos 1 \quad \text{et} \quad \ell' = \ell' \cos 1 - \ell \sin 1.$$

Multiplions la première égalité par ℓ et la seconde par ℓ' :

$$\ell^2 = \ell \ell' \sin 1 + \ell^2 \cos 1 \quad \text{et} \quad (\ell')^2 = (\ell')^2 \cos 1 - \ell \ell' \sin 1.$$

En additionnant ces deux équations, on obtient donc :

$$\ell^2 + (\ell')^2 = \cos 1 (\ell^2 + (\ell')^2),$$

et comme $1 \neq \cos 1$, $\ell^2 + (\ell')^2 = 0$, d'où $\ell = \ell' = 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, donc $\ell^2 + (\ell')^2 = 1$, ce qui est incompatible avec $\ell = \ell' = 0$. On obtient donc une contradiction. Ainsi, $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exercice 11 – On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - v_n}{n} = \ell - \ell'$, donc $u_n - v_n \underset{+\infty}{\sim} n(\ell - \ell')$.

Comme $\ell - \ell' > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ell - \ell') = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = +\infty$.

Exercice 12 – Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n = u_{n+1} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0,$$

d'après l'hypothèse. Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De plus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc majorée.

En tant que suite croissante et majorée, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit ℓ sa limite.

Si $\ell \neq 0$, supposons par exemple que $\ell > 0$ (le cas de $\ell < 0$ se résout de manière symétrique). Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > \frac{\ell}{2}$, donc $u_{n+1} - u_n > \frac{\ell}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$u_n - u_N = \sum_{k=N}^{n-1} u_{k+1} - u_k > (n - N) \frac{\ell}{2}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - N) \frac{\ell}{2} = +\infty$, donc, d'après le théorème de minoration, $(u_n - u_N)$ admet une limite, égale à $+\infty$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Cela contredit le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 14 –

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos \frac{1}{2} \times \cos \frac{1}{4} \times \cdots \times \cos \frac{1}{2^n}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^k} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos \frac{1}{2^k} \geq 0$.

De plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos \frac{1}{2^{n+1}} \leq 1.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^{2^k})$, $a \in \mathbb{R}_+$

Alors, de même, pour tout $k \geq 1$, $1 + a^{2^k} \geq 1$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{2^{n+1}} \geq 1.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, donc admet une limite, finie ou infinie. De plus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est clairement minorée par 1, donc 0 n'est pas limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- Si $a \geq 1$, alors $(1 + a^{2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 1. Ainsi, la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas être finie. Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, et comme cette limite est non nulle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, d'où une contradiction.
- Si $0 \leq a < 1$, alors considérons $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a^{2^k}) \geq 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + x) \leq x$ (étudiez la fonction !), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n a^{2^k} \leq \sum_{\ell=1}^{2^n} a^\ell \leq \frac{1}{1-a}.$$

La seconde majoration est obtenue en ajoutant des termes positifs dans la somme, la dernière à l'aide de la formule de la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi, $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, donc aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissant et majorée, elle converge.

Exercice 16 – (Moyenne de Cesaro)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$

1. • Supposons dans un premier temps que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, |u_n| < \varepsilon. \quad (1)$$

Soit un tel N . Alors :

$$\forall n \geq N, |v_n| = \frac{\left| \sum_{k=1}^n u_k \right|}{n} = \frac{\left| \sum_{k=1}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n u_k \right|}{n} \leq \frac{\left| \sum_{k=1}^N u_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right|}{n},$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité triangulaire. En utilisant encore l'inégalité triangulaire sur la seconde somme, on obtient :

$$\forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k|.$$

Or, tous les indices de la seconde somme vérifient $k > N$, donc, d'après le choix de N vérifiant la propriété 1, on en déduit que $|u_k| < \varepsilon$, d'où :

$$\forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \varepsilon = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| + \frac{N-n}{n} \varepsilon \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| + \varepsilon.$$

De plus, ε et N ayant été fixés, $\sum_{k=1}^N u_k$ est une constante (cette quantité ne dépend pas de N). Donc la

suite $\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, et par conséquent :

$$\exists N' \geq N, \quad \forall n \geq N', \quad \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n u_k \right| < \varepsilon.$$

On en déduit que : $\forall n \geq N', \quad |v_n| < 2\varepsilon$. Par conséquent, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

- Supposons maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendent vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u'_n = u_n - \ell$, et $v'_n = \frac{1}{n}(u'_1 + \dots + u'_n)$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n = 0$, et par conséquent, d'après le point précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v'_n = 0$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \left(\left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - n\ell \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell = v_n - \ell.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v'_n + \ell$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

- Supposons maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A + 2. \quad (2)$$

Soit un tel N . Alors :

$$\forall n \geq N, \quad v_n = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^N u_k + \sum_{k=N+1}^n u_k}{n} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (A + 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k + \frac{n - N}{n} (A + 2)$$

Or, comme précédemment, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k = 0$, donc, en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition :

$$\exists N' \geq N, \quad \forall n \geq N', \quad -1 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k < 1.$$

De plus, $\left(\frac{n-N}{n} (A + 2) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $A + 2$, donc :

$$\exists N'' \geq N, \quad \forall n \geq N'', \quad \frac{n - N}{n} (A + 2) > A + 1.$$

Alors :

$$\forall n \geq \max(N', N''), \quad v_n > -1 + A + 1 = A.$$

Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$.

- En considérant $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on récupère le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

2. Supposons que $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tende vers ℓ , fini ou infini. La suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors vers ℓ , d'après la question 1. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_{k+1} - \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{u_{n+1}}{n} - \frac{u_1}{n}.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1}{n} = 0$, par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{n} = \ell$. De plus, $n \sim_{+\infty} n + 1$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{n + 1} = \ell$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs, $\ell \in \mathbb{R}_+$, ou $\ell = +\infty$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}_+$, alors, le logarithme étant continu sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \ell \quad \text{soit:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln \ell.$$

En appliquant la question 2 avec la suite $(u'_n) = (\ln u_n)$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln \ell \quad \text{soit:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \ln(u_n)} = e^{\ln \ell} = \ell,$$

car l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

- Si $\ell = 0$, alors de la même façon, $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$, donc $\left(\frac{\ln(u_n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$, donc, en passant à l'exponentielle, $(u_n^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
- Si $\ell = +\infty$, alors de la même façon, $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, donc $\left(\frac{\ln(u_n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, donc, en passant à l'exponentielle, $(u_n^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

4. On applique la question précédente, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = \binom{2n}{n}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!(n+1)!^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^2} = 4.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_{n+1}}{u'_n} = 4$, et par conséquent, d'après la question 3,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u'_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{2n}{n}^{1/n} = 4.$$

Exercice 18 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrons que $[0, \sqrt{12}]$ est un intervalle stable par $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$.

Tout d'abord, f est bien défini sur cet intervalle, puisque $\sqrt{12} \leq 12$. De plus :

$$\forall x \in [0, \sqrt{12}], \quad 0 \leq 12 - x \leq 12 \text{ donc: } 0 \leq \sqrt{12 - x} \leq \sqrt{12}.$$

Ainsi, $f([0, \sqrt{12}]) \subset [0, \sqrt{12}]$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \in [0, \sqrt{12}]$.

Comme $u_0 = 0$, u_0 est bien défini, et $u_0 \in [0, \sqrt{12}]$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit satisfait. Alors $u_n \in [0, \sqrt{12}]$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini, et puisque $[0, \sqrt{12}]$ est stable par f , $u_{n+1} \in [0, \sqrt{12}]$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. La fonction f est décroissante sur l'intervalle stable $[0, \sqrt{12}]$. Par conséquent, la composée $f \circ f$ est croissante sur l'intervalle $[0, \sqrt{12}]$, qui, étant stable par f , l'est également par $f \circ f$. Or, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = f \circ f(x_n)$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $x_{n+1} \geq x_n$.

On a $u_2 \in [0, \sqrt{12}]$, donc $u_2 \geq 0 = u_0$, donc $x_1 \geq x_0$. Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est satisfait.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit satisfait. Alors :

$$x_{n+1} \geq x_n.$$

La fonction $f \circ f$ étant croissante, on en déduit :

$$f \circ f(x_{n+1}) \geq f \circ f(x_n) \quad \text{soit:} \quad x_{n+2} \geq x_{n+1},$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Alors, f étant décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \geq x_n \quad \text{donc:} \quad f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \quad \text{soit:} \quad y_{n+1} \leq y_n.$$

Par conséquent, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Puisque $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq y_0 = u_1$, et de plus, $u_1 \leq \sqrt{12} \leq 4$.

Il reste à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$, ce que l'on fait par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{R}(n)$: $x_n \leq y_n$.

On a $x_0 = 0$ et $y_0 = u_1 = \sqrt{12}$, donc $x_0 \leq y_0$, d'où $\mathcal{R}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{R}(n)$. Alors $x_n \leq y_n$, et $f \circ f$ étant croissante sur $[0, \sqrt{12}]$, intervalle contenant x_n et y_n , on en déduit que :

$$f \circ f(x_n) \leq f \circ f(y_n) \quad \text{soit:} \quad x_{n+1} \leq y_{n+1}.$$

D'où $\mathcal{R}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{R}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n)$ entraîne $\mathcal{R}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

4. Cette question est évidente si on dispose de l'IAF (inégalité des accroissements finis, je vous renvoie à votre futur cours sur la dérivation). Pour le moment, contournons ce résultat grâce à une intégration, en remarquant que f est une primitive de f' .

Pour commencer, calculons f' . La fonction f est dérivable sur $[0, \sqrt{12}]$, et :

$$\forall x \in [0, \sqrt{12}], \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{12-x}}.$$

Or, pour tout $x \in [0, \sqrt{12}]$, $12-x \geq 12-\sqrt{12} \leq 12-4=8$, d'où :

$$\forall x \in [0, \sqrt{12}], \quad |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{12-x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $u_{n-1} \leq u_n$, alors :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= |f(u_n) - f(u_{n-1})| = \left| \int_{u_{n-1}}^{u_n} f'(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_{u_{n-1}}^{u_n} |f'(t)| \, dt \leq \int_{u_{n-1}}^{u_n} \frac{dt}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{4\sqrt{3}}|u_n - u_{n-1}|. \end{aligned}$$

- Si $u_{n-1} \geq u_n$, alors :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= |f(u_n) - f(u_{n-1})| = \left| \int_{u_{n-1}}^{u_n} f'(t) \, dt \right| = \left| \int_{u_n}^{u_{n-1}} f'(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_{u_n}^{u_{n-1}} |f'(t)| \, dt \leq \int_{u_n}^{u_{n-1}} \frac{dt}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(u_{n-1} - u_n) = \frac{1}{4\sqrt{3}}|u_n - u_{n-1}|. \end{aligned}$$

J'ai fait cette distinction des cas, car l'inégalité triangulaire pour les intégrales (passer la valeur absolue de l'extérieur à l'intérieur de l'intégrale) n'est valable que si les bornes de l'intégrale sont dans le sens croissant.

5. On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_{n+1} - x_{n+1}| = |u_{2n+3} - u_{2n+2}| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}|u_{2n+2} - u_{2n+1}| \leq \frac{1}{(4\sqrt{3})^2}|u_{2n+1} - u_{2n}| = \frac{1}{48}|y_n - x_n|.$$

Une récurrence immédiate amène alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |y_n - x_n| \leq \frac{1}{48^n} |y_0 - x_0|.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{48^n} = 0$, car c'est une suite géométrique de raison appartenant à $] -1, 1[$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - x_n) = 0$.

De plus, on a déjà démontré que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, il en résulte que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , ainsi $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ . Alors, soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists N_2, \forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$$

Par conséquent :

$$\forall n \geq 2 \max(N_1, N_2), |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Déterminons ℓ . La fonction f étant continue sur l'intervalle stable $[0, \sqrt{12}]$, en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient $f(\ell) = \ell$, donc

$$\ell = \sqrt{12 - \ell} \quad \text{soit:} \quad \ell^2 = 12 - \ell \quad \text{soit:} \quad \ell^2 + \ell - 12.$$

Cette équation admet pour solutions -4 et 3 . Comme $-4 < 0$ alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, on en déduit que -4 ne peut pas être la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par conséquent, $\ell = 3$

Exercice 19 -

1. $u_0 \geq \frac{-3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

Soit $f : [-\frac{3}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [-\frac{3}{2}, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x + 3}$. Cette fonction est croissante, et à valeurs positives. Ainsi, $f([-\frac{3}{2}, +\infty[) \subset \mathbb{R}^+ \subset [-\frac{3}{2}, +\infty[$. Par conséquent, l'intervalle de définition $[-\frac{3}{2}, +\infty[$ est stable par f . On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie (récurrence immédiate)

Cherchons les points fixes de f . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (f(x) = x) \iff (x = \sqrt{2x + 3}) \iff (x^2 = 2x + 3 \text{ et } x \geq 0) \iff x = 3.$$

Le seul point fixe de f est donc 3.

De plus, f étant croissante, si $x \leq 3$, alors $f(x) \leq f(3) = 3$. Ainsi, $]-\frac{3}{2}, 3]$ est stable par f . De même, $[3, +\infty[$ est stable par f .

- Supposons donc dans un premier temps que $u_0 \in]-\frac{3}{2}, 3]$. Alors, puisque $]-\frac{3}{2}, 3]$ est stable par f , une récurrence immédiate amène que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\frac{3}{2}, 3]$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Par une démonstration du cours (à refaire), $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, car f est croissante. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant monotone et bornée, elle converge dans $\mathbb{R}$. Comme f est continue sur son domaine fermé, cette limite est point fixe de f . Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$. En passant, remarquez que cela implique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, ce qu'on n'a pas eu besoin d'établir au préalable.

- Supposons que $u_0 \in [3, +\infty[$. On a :

$$\forall x \geq 3, \quad f(x) - x = \sqrt{2x + 3} - x = \frac{\sqrt{2x + 3} + x}{2x + 3 - x^2}.$$

Or, puisque $x \geq 3$, le numérateur est positif, et puisqu'on est à l'extérieur des deux racines du dénominateur, le signe du dénominateur est celui du coefficient du terme de degré 2, donc négatif. Ainsi, pour tout $x \geq 3$, $f(x) \leq x$.

Or, $[3, +\infty[$ est stable par f , et $u_0 \in [3, +\infty[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [3, +\infty[$. Ainsi, d'après ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est minorée par 3. Donc elle converge. Comme précédemment, sa seule limite possible est 3, point fixe de f , puisque f est continue.

Ainsi, quelle que soit la valeur de $u_0 \geq -\frac{3}{2}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Exercice 20 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Elle converge donc soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_{2^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}.$$

Or, pour tout $k \in [2^n + 1, 2^{n+1}]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$, car $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi :

$$v_{n+1} - v_n \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}}.$$

En effet on a sommé 2^n termes tous égaux à $\frac{1}{2^{n+1}}$, d'où la dernière égalité. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{2}$.

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - v_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

La limite de cette dernière expression étant $+\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, d'après le théorème de minoration.

3. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admette une limite finie ℓ . Soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$, donc, pour un N tel que ci-dessus :

$$\forall n \geq N, 2^n \geq n \geq N, \quad \text{donc:} \quad |u_{2^n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{soit:} \quad |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet également pour limite le réel ℓ , ce qui contredit la question précédente. D'après la question 1, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 21 –

1. Tout d'abord, $u_1 = f(u_0) = f(1) = \sqrt{2}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n est bien défini et vérifie les égalités requises.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_{2n} et u_{2n+1} sont définis, et $\begin{cases} u_{2n} > 0 \\ u_{2n+1} > 1 \end{cases}$.

On a : $u_0 = 1 > 0$ et $u_1 = \sqrt{2} > 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors $u_{2n+1} \in D_g =]1, +\infty[$, donc u_{2n+2} est bien défini, et :

$$u_{2n+2} = g(u_{2n+1}) = \frac{1}{u_{2n+1} - 1} > 0,$$

l'inégalité provenant du fait que $u_{2n+1} > 1$. Ainsi, $u_{2n+2} \in D_f = [0, +\infty[$, donc u_{2n+3} est bien définie, et

$$u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = \sqrt{1 + u_{2n+2}} > 1,$$

puisque $u_{2n+2} > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2. Tout d'abord, $g \circ f(x)$ est bien défini pour tout $x \in]0, +\infty[$ (première chose à faire de manière générale : s'assurer que les objets dont on parle sont bien définis). En effet, pour tout $x > 0$, $f(x) > 1$, donc $f(x) \in D_g$. Ainsi, $D_{g \circ f} =]0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x + 1$ est croissante sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f étant la composée de ces deux fonctions croissantes, f est croissante.

N'oubliez pas de bien préciser que la première fonction qu'on applique prend ses valeurs dans le domaine sur lequel on étudie la monotonie de la seconde fonction.

Vous pouvez aussi bien sûr étudier les variations de f en dérivant f . N'oubliez pas dans ce cas de préciser la dérivabilité avant de dériver.

La fonction $x \mapsto x - 1$ est croissante sur $]1, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $y \mapsto \frac{1}{y}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, g étant la composée de ces deux fonctions, l'une croissante, l'autre décroissante, g est décroissante.

Ainsi, $g \circ f$ est la composée d'une application croissante sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]1, +\infty[$, et d'une application décroissante sur $]1, +\infty[$. Elle est donc décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $\Phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = g \circ f \circ g \circ f$. La fonction φ est la composée de deux fonctions décroissantes (on compose $g \circ f$ avec elle-même). Donc φ est croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{4n+4} = g(u_{4n+3}) = g \circ f(u_{4n+2}) = g \circ f \circ g(u_{4n+1}) = g \circ f \circ g \circ f(u_{4n}) = \varphi(u_{4n}).$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{4n}$ est donc définie par la condition initiale $v_0 = u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \varphi(v_n)$, où φ est croissante.

Un résultat du cours nous dit qu'alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Vous n'êtes pas censés appliquer directement ce résultat, mais vous devez refaire sa démonstration dans ce cas précis. Allons-y !

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $u_{4n+4} \geq u_{4n}$.

Tout d'abord,

(a) $u_1 = \sqrt{2}$, donc :

(b) $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$, donc :

(c) $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} > \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc :

(d) $u_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}) > \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} > 1$.

Ainsi, $u_4 > u_0 = 1$, d'où $\mathcal{Q}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$. Alors, φ étant croissante, elle préserve les inégalités (larges), donc :

$$\varphi(u_{4n}) \leq \varphi(u_{4n+4}), \quad \text{soit :} \quad u_{4n+4} \leq u_{4n+8}.$$

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. On sait déjà que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Montrons qu'elle est majorée. Une chose à bien retenir : dans le cas d'une suite définie par récurrence, si elle est croissante et majorée, elle est notamment majorée par sa limite, qui est un point fixe de la fonction définissant la récurrence (dans le cas où cette fonction est continue). Donc, pour deviner un majorant possible, il peut être utile de déterminer les points fixes de la fonction définissant la récurrence.

Déterminons donc les points fixes de φ . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x}, \quad \text{donc :} \quad g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1), \quad \text{donc :}$$

$$f \circ g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)} + 1, \quad \text{donc :}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)} + 1 + 1}{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x &\iff \frac{\sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)} + 1 + 1}{\sqrt{1+x}+1} = 1 \\ &\iff \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)} + 1 + 1 = \sqrt{1+x}+1 \\ &\iff \sqrt{\frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1)} + 1 = \sqrt{1+x} \\ &\iff \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1) + 1 = 1+x \quad (\text{équivalent car tout est positif}) \\ &\iff \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}+1) = x \\ &\iff \sqrt{1+x} = x^2 - 1 \\ &\iff (x^2 - 1)^2 - (1+x) = 0 \\ &\iff ((x-1)^2(x+1) - 1)(x+1) = 0 \\ &\iff ((x-1)(x^2 - 1) - 1)(x+1) = 0 \\ &\iff (x^3 - x^2 - x)(x+1) = 0 \\ &\iff x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(x) = x$ si et seulement si $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La limite ℓ de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$, si elle existe, est forcément une de ces quatre valeurs. En effet, φ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, en passant à la limite dans la relation $u_{4n+4} = \varphi(u_{4n})$, on obtient $\ell = \varphi(\ell)$.

De plus, puisque $u_4 > 1$ et que $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{4n} \geq u_4$, et par passage à la limite (toujours sous réserve d'existence), $\ell \geq u_4 > 1$. Donc, si la limite existe, elle vérifie $\ell > 1$. Ainsi, la seule valeur possible de ℓ est : $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soit $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrons que x_0 est un majorant de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} \leq x_0$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{R}(n)$: $u_{4n} \leq x_0$.

On a $u_0 = 1 < x_0$, d'où $\mathcal{R}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$. Alors, φ étant croissante, $\varphi(u_{4n}) \leq \varphi(x_0)$, c'est-à-dire, puisque x_0 est un point fixe de φ : $u_{4n+4} \leq x_0$, d'où $\mathcal{R}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{R}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n)$ entraîne $\mathcal{R}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Pensez à bien exploiter le fait que x_0 est point fixe de φ .

Conclusion : $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle converge donc dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, sa limite est donc :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. Déterminons les points fixes de f (dans $\mathbb{R}_+$, ce qui permet d'élever au carré sans problème) : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff 1+x = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Or, ℓ a été défini comme une racine de ce polynôme, donc ℓ est un point fixe de f .

De même, déterminons les points fixes de g ($x > 1$, donc toutes les implications sont des équivalences, notamment la deuxième) : pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$g(x) = x \iff \frac{1}{x-1} = x \iff 1 = x^2 - x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Encore une fois, ℓ étant racine de ce polynôme, ℓ est point fixe de g .

6. – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+1} = f(u_{4n})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(f(u_{4n}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $f(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n+1} = \ell$.
La croissance de $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n} \leq u_{4n+4}$, donc, en appliquant la fonction f croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{4n+1} \leq u_{4n+5}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} = g \circ f(u_{4n})$. Comme $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(g \circ f(u_{4n}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $g \circ f(\ell) = g(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n+2} = \ell$.
La croissance de $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+1} \leq u_{4n+5}$, donc, en appliquant la fonction g décroissante sur $]1, +\infty[$, $u_{4n+2} \geq u_{4n+6}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+3} = f \circ g \circ f(u_{4n})$. Comme $f \circ g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $(f \circ g \circ f(u_{4n}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et cette limite vaut $f \circ g \circ f(\ell) = f \circ g(\ell) = f(\ell) = \ell$. Ainsi, $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n+3} = \ell$.
La décroissance de $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} \geq u_{4n+6}$, donc, en appliquant la fonction f croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_{4n+3} \geq u_{4n+7}$. Ainsi, la suite $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Soit $\varepsilon > 0$.

- Puisque $(u_{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_0, \forall n \geq N_0, |u_{4n} - \ell| < \varepsilon$.
- Puisque $(u_{4n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_1, \forall n \geq N_1, |u_{4n+1} - \ell| < \varepsilon$.
- Puisque $(u_{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_2, \forall n \geq N_2, |u_{4n+2} - \ell| < \varepsilon$.
- Puisque $(u_{4n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\exists N_3, \forall n \geq N_3, |u_{4n+3} - \ell| < \varepsilon$.

Soit $N = \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$. On en déduit donc que :

$$\forall n \geq N, \begin{cases} |u_{4n} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+1} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+2} - \ell| < \varepsilon \\ |u_{4n+3} - \ell| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \forall m \geq 4N, |u_m - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, le critère de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est bien vérifié.

Cette démonstration est à retenir. Sachez la faire.