

Correction du Devoir Maison n° 11

PARTIE I – Chemins

1. La longueur de la liste est le nombre de pas total, c'est-à-dire $a + b$.
2. Le nombre de 0 est le nombre de pas à droite, à savoir a . Le nombre de 1 est le nombre de pas montant, à savoir b .
3. Il faut compter le nombre de listes de 0 et de 1 de longueur $a + b$ ayant a occurrences de 0 et b occurrences de 1 : il faut donc choisir la place des a occurrences de 0 dans la liste (a parmi $a + b$). Ainsi, le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) est $\binom{a+b}{a}$.
4. Il s'agit d'une application directe du résultat précédent : la notion de chemin décrite dans l'énoncé correspond à la notion de plus court chemin sur un quadrillage (lorsqu'on ne s'autorise que des déplacements verticaux et horizontaux). C'est le cas ici, puisque les rues forment un quadrillage. Ce sont les chemins les plus courts, car on ne s'autorise pas à aller dans deux directions opposées (on ne fait que des pas à droite, pas de pas à gauche). Par conséquent, Monsieur Dupont a autant de façons de rentrer chez lui qu'il y a de chemin de $(0, 0)$ à $(3, 4)$, c'est-à-dire $\binom{7}{3} = 35$.

PARTIE II – Le problème des boîtes d'allumettes de Banach.

1. On associe un chemin à une succession de choix de boîtes d'allumettes : un pas vers la droite représente un choix d'allumette dans la boîte 1, un pas vers le haut un choix d'allumette dans la boîte 2. Au moment où Banach se rend compte qu'il ne reste plus d'allumette dans la boîte 1, c'est qu'il s'apprête à tirer pour la $N + 1$ -ième fois une allumette dans la boîte 1 (correspond au dernier choix). De plus, s'il reste n allumettes dans la boîte 2 à ce moment, cela signifie qu'on en a tiré $N - n$.

Ainsi, le nombre de chemins correspondant à une succession de choix d'allumettes telle que lorsque Banach se rend compte que la boîte 1 est vide, il reste n allumettes dans la boîte 2 est égal au nombre de chemins de $(0, 0)$ à $(N + 1, N - n)$ terminant par un choix dans la boîte 1 (c'est-à-dire par un pas à droite). On peut supprimer le dernier pas qui est déterminé : le cardinal de l'ensemble de ces chemins est le même que le cardinal de l'ensemble de tous les chemins de $(0, 0)$ à $(N, N - n)$, c'est-à-dire $\binom{2N-n}{N}$.

2. Soit, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, A_n l'événement « il reste n allumettes dans la boîte 2 lorsque Banach se rend compte que la boîte 1 est vide ».

Soit $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ Un chemin de $(0, 0)$ à $(N + 1, N - n)$ (il faut ici compter le dernier choix) est déterminé par $2N - n + 1$ choix successifs entre 2 valeurs ; donc chaque choix est obtenu avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Les choix successifs étant indépendants, une succession donnée de $2N - n + 1$ pas est obtenue avec une probabilité de $\frac{1}{2^{2N-n+1}}$. Ainsi, chacun des chemins amenant l'événement A_n est obtenu avec une probabilité de $\frac{1}{2^{2N-n+1}}$. Puisqu'il y a $\binom{2N-n}{N}$ chemins amenant cet événement, on en déduit que

$$P(A_n) = \binom{2N-n}{N} \frac{1}{2^{2N-n+1}}.$$

De la même manière, si, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, B_n désigne l'événement « il reste n allumettes dans la boîte 1 lorsque Banach se rend compte que la boîte 1 est vide », on a :

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad P(B_n) = \binom{2N-n}{N} \frac{1}{2^{2N-n+1}}.$$

3. Banach tombe en panne d'allumettes si au moment où il s'aperçoit que la boîte 1 est vide, la boîte 2 l'est également, ou bien si au moment où il se rend compte que la boîte 2 est vide, la première l'est également. Cela correspond à l'événement $A_0 \cup B_0$. Les deux événements A_0 et B_0 étant incompatibles, la probabilité pour Banach de tomber en panne d'allumettes est :

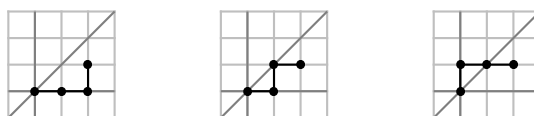
$$P(A_0 \cup B_0) = P(A_0) + P(B_0) = \binom{2N}{N} \frac{1}{2^{2N}}$$

4. En supposant que le tirage d'allumette est infini, il arrivera forcément un moment où Banach se rend compte qu'une des deux boîtes est vide. Cet événement est l'événement certain. Il est obtenu par union des événements A_n et B_n , pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, ces événements étant 2 à 2 incompatibles. Ainsi, on en déduit que $\{A_n, n \in \llbracket 0, N \rrbracket\} \cup \{B_n, n \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$ est un système complet d'événement. La somme de leur probabilité est donc 1. Par conséquent :

$$1 = \sum_{n=0}^N P(A_n) + \sum_{n=0}^N P(B_n) = \sum_{n=0}^N (P(A_n) + P(B_n)) = \sum_{n=0}^N \binom{2N-n}{N} \frac{1}{2^{2N-n}}.$$

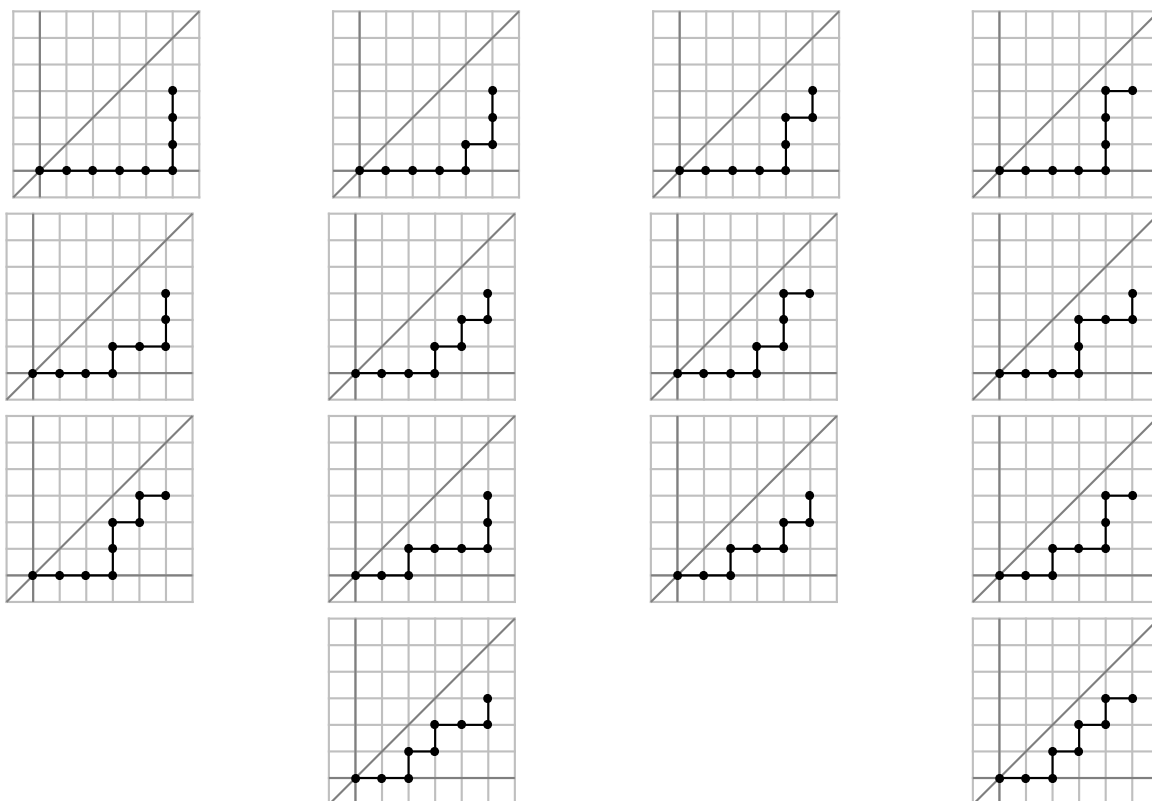
PARTIE III – Chemins de Dyck

1. Soit $(a, b) = (2, 1)$. Les chemins de $(0, 0)$ à $(2, 1)$ sont :



Le seul chemin restant strictement en-dessous de la diagonale est le premier, correspondant à $(0, 0, 1)$.

Pour $(a, b) = (5, 3)$, les chemins restant sous la diagonale sont :



Ces chemins correspondent aux listes suivantes :

$$\begin{array}{cccc}
(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) & (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) & (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) & (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \\
(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1) & (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) & (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) & (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\
(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) & (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) & (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) & (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \\
(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1) & (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) & &
\end{array}$$

Il y a donc 14 chemins restant strictement en dessous de la diagonale.

2. (a) Soit C l'ensemble de tous les chemins de $(0, 0)$ à (a, b) , C_1 l'ensemble des chemins passant par $(1, 0)$ ne rencontrant pas la diagonale Δ (ailleurs qu'en $(0, 0)$), C_2 l'ensemble des chemins passant par $(1, 0)$ rencontrant la diagonale Δ ailleurs qu'en $(0, 0)$, et C_3 l'ensemble des chemins passant par $(0, 1)$.
 - Tous les chemins de $(0, 0)$ à (a, b) sont soit dans C_1 , soit dans C_2 , soit dans C_3 : soit ils passent par $(0, 1)$, soit ils passent par $(1, 0)$ (choix du premier pas), et dans ce cas, soit ils croisent la diagonale, soit ils ne la croisent pas. Ainsi $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = C$.
 - Par ailleurs, ces ensembles sont clairement disjoints 2 à 2.
 - Par conséquent, pour montrer qu'ils forment une partition de C , il ne suffit plus que de montrer qu'ils sont non vides. C'est le cas si $b > 0$; il suffit en effet de considérer les chemins suivants : $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, $(0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ et $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
Ainsi, si $b > 0$, $\{C_1, C_2, C_3\}$ est une partition de C , et par conséquent

$$|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3|.$$

- (b) Si $b = 0$, C_2 et C_3 sont vides car le seul chemin possible ne contient que des pas horizontaux. Ainsi, $C = C_1$, et on a encore $|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3|$.
- (c) Dans tous les cas, on a donc $|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3|$.
3. (a) • Tout d'abord, assurons-nous que Φ est bien défini, c'est-à-dire que d'une part, on peut faire la construction décrite, et que d'autre part, le chemin obtenu est bien dans C_3 .
 - * La condition nécessaire et suffisante pour que la construction soit possible est que le chemin Γ rencontre Δ ailleurs qu'en $(0, 0)$, ce qui est le cas d'après la définition de C_2 .
 - * De plus, Γ passe par $(0, 1)$, et ceci à son premier pas, c'est-à-dire avant de rencontrer la diagonale, c'est-à-dire sur la portion dont on prend le symétrique par rapport à Δ . Ainsi, $\Phi(\Gamma)$ passe par $(1, 0)$, le symétrique de $(0, 1)$ par rapport à Δ . On en déduit que $\Phi(\Gamma)$ est bien dans C_3 .
• On construit une application réciproque $\Psi : C_3 \longrightarrow C_2$. Cette application est définie comme Ψ en prenant le symétrique par rapport à Δ de la portion de $\Gamma \in C_3$ comprise entre $(0, 0)$ et le premier point d'intersection avec Δ .
 - * Cette construction peut se faire, car Γ étant dans C_3 , ce chemin passe par $(0, 1)$ et arrive à (a, b) , avec $a > b$. Ces deux points étant de part et d'autre de la diagonale, il croise forcément celle-ci.
 - * L'image de Γ par Ψ rencontre Δ au même point (premier point d'intersection), et passe par $(1, 0)$: elle est donc dans C_2 .
 - * La symétrie axiale étant une involution (c'est-à-dire l'inverse d'elle-même), Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre. Ainsi, ce sont des bijections.
- (b) L'ensemble C_3 est l'ensemble de tous les chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$. Autrement dit, le premier pas étant complètement déterminé, c'est aussi l'ensemble de tous les chemins de $(0, 1)$ à (a, b) , au nombre de $\binom{a+b-1}{a}$.
- (c) Puisque $|C_2| = |C_3|$ (car ils sont en bijection), le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (a, b) restant toujours en dessous de la diagonale est :

$$|C_1| = |C| - |C_2| - |C_3| = |C| - 2|C_3|.$$

On a calculé $|C_3|$ dans la question précédente, et $|C|$ dans la partie 1 (le nombre de tous les chemins de $(0, 0)$ à (a, b)). On obtient donc :

$$|C_1| = \binom{a+b}{a} - 2 \binom{a+b-1}{a} = \frac{(a+b)!}{a!b!} - 2 \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} = \frac{(a+b)!}{a!b!} \left(1 - 2 \frac{b}{a+b}\right) = \frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}.$$

4. • On construit une bijection Φ de l'ensemble des chemins de Dyck vers l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à $(n+1, n)$ en rajoutant un pas vers la droite au début du chemin : cela décale tous les autres pas d'un vers la droite. Plus précisément, si $(0, 0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{2n-1}, b_{2n-1}), (n, n)$ représentent les différents points du chemin de Dyck Γ , les différents points du chemin $\Phi(\Gamma)$ sont $(0, 0), (1, 0), (a_1 + 1, b_1), (a_2 + 1, b_2), \dots, (a_{2n-1} + 1, b_{2n-1}), (n+1, n)$. Or, Γ étant un chemin de Dyck, pour tout k entre 0 et $2n$, on a $a_k \geq b_k$. Le point correspondant $(a_k + 1, b_k)$ du chemin $\Phi(\Gamma)$ vérifie donc $a_k + 1 > b_k$: il est donc strictement sous la diagonale Δ . Par conséquent, $\Phi(\Gamma)$ est un chemin de $(0, 0)$ à $(n+1, n)$ restant toujours strictement sous la diagonale.
- Réciproquement, soit Γ un chemin allant de $(0, 0)$ à $(n+1, n)$. On lui associe le chemin $\Psi(\Gamma)$ allant de $(0, 0)$ à (n, n) obtenu en lui supprimant le premier pas, qui est forcément un pas vers la droite (puisque'il faut rester sous la diagonale). Cela décale le chemin d'un vers la gauche. Comme Γ est strictement sous la diagonale, $\Psi(\Gamma)$ est encore sous la diagonale, au sens large. Ainsi, il s'agit d'un chemin de Dyck.
- Les applications Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi l'ensemble des chemins de Dyck est en bijection avec l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à $(n+1, n)$ restant toujours strictement sous la diagonale. D'après la question précédente, leur nombre est donc :

$$\Gamma_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}.$$

5. C'est une application directe du résultat précédent. La falaise est représentée par Δ . Son point de départ est $(0, 0)$, son point d'arrivée est (n, n) . Le précipice se trouve, disons au-dessus de Δ : ainsi l'ivrogne doit rester sous la diagonale (on suppose que s'il est sur la diagonale, c'est-à-dire juste au bord de la falaise, il ne tombe pas). Une titubation vers la droite est représentée par un pas à droite, une titubation vers la gauche par un pas vers le haut. S'il n'y avait pas de falaises, puisqu'on sait que l'ivrogne est assez lucide pour parvenir à rentrer chez lui, il y a $\binom{2n}{n}$ chemins possibles (cf. partie 1). Tous les chemins sont équiprobables, car de longueur égale, valant $2n$. Le nombre de chemins laissant l'ivrogne sain et sauf est le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Ainsi, la probabilité pour que l'ivrogne survive est de

$$p = \frac{\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2 (2n+1)!}{(2n+1)(2n)!(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}$$

PARTIE IV – Une autre façon de compter les chemins de Dyck

1. On va montrer que c'est une relation reflexive, symétrique et transitive.
- reflexivité : correspond à $p = N$.
 - symétrie : Soit Γ et Γ' tels que $\Gamma' = (b_1, \dots, b_N)$ est un conjugué de $\Gamma = (a_1, \dots, a_N)$. Alors il existe $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que

$$\Gamma' = (a_{p+1}, \dots, a_N, a_1, \dots, a_p).$$

Le cas où $p = N$ est trivial car alors $\Gamma = \Gamma'$. Supposons donc $p \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

Ainsi, $b_i = a_{p+i}$ si $p+i \leq N$ et $b_i = a_{p+i-N}$ sinon. Posons alors $p' = N - p$. On a alors :

$$(b_{p'+1}, \dots, b_n, b_1, \dots, b_{p'}) = (a_1, \dots, a_n).$$

Ainsi Γ est un conjugué de Γ' .

- transitivité : $\Gamma' = (b_1, \dots, b_n)$ est un conjugué de $\Gamma = (a_1, \dots, a_n)$ et $\Gamma'' = (c_1, \dots, c_n)$ est un conjugué de $\Gamma' = (b_1, \dots, b_n)$, alors, il existe $p, p' \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tels que

$$(b_1, \dots, b_n) = (a_{p+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_p) \text{ et } (c_1, \dots, c_n) = (b_{p'+1}, \dots, b_n, b_1, \dots, b_{p'}).$$

Soit, pour $p'' - 1$ le reste de la division euclidienne de $p + p' - 1$ modulo N . Ainsi p'' est le seul entier de $\llbracket 1, N \rrbracket$ congru à $p + p'$ modulo N . On a alors :

$$(c_1, \dots, c_n) = (a_{p''+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{p''}).$$

2. (a) Les conjugués de $(1, 1, 0, 0, 0)$ sont au nombre de 5 :

$$(1, 1, 0, 0, 0) \quad (1, 0, 0, 0, 1) \quad (0, 0, 0, 1, 1) \quad (0, 0, 1, 1, 0) \quad (0, 1, 1, 0, 0).$$

Je vous laisse faire pour les représentations graphiques.

- (b) Graphiquement la conjugaison consiste à couper un chemin en deux, et à inverser les deux bouts : on parcourt d'abord la deuxième partie (en translatant son origine en $(0, 0)$) puis la première partie.

- (c) Les conjugués de $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ sont au nombre de 7 :

$$\begin{aligned} &(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \quad (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \quad (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \quad (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1) \\ &(0, 1, 1, 0, 1, 1, 0) \quad (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0) \quad (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

- (d) Les conjugués de $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$ sont au nombre de 3 : $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$. Si on continue, on retombe sur des chemins déjà comptabilisés.

- (e) Les exemples sembleraient dire que $(a_1, \dots, a_n)$ ne doit pas présenter de période, c'est-à-dire ne doit pas s'écrire $(b_1, \dots, b_k, b_1, \dots, b_k, \dots, b_1, \dots, b_k)$. C'est en effet une condition nécessaire et suffisante :

- Si un chemin présente une périodicité, c'est-à-dire s'il s'écrit $(b_1, \dots, b_k, b_1, \dots, b_k, \dots, b_1, \dots, b_k)$, alors certains conjugués obtenus pour des valeurs différentes de p sont égaux par exemple $p = k$ et $p = 2$.
- Si en revanche un chemin ne présente aucune périodicité, les différents conjugués obtenus sont bien sûr deux à deux distincts. On en obtient donc n .

3. Si Γ est un chemin de Dyck, $\bar{\Gamma}$ ne peut pas présenter de périodicité. En effet, notons $\Gamma' \cdot \Gamma''$ l'opération consistant à concaténer les chemins (c'est-à-dire à les mettre bout à bout : on parcourt Γ' et on parcourt ensuite Γ'' , en le faisant partir de l'extrémité de Γ'). Ainsi, si Γ' va de $(0, 0)$ à (a', b') et Γ'' va de $(0, 0)$ à (a'', b'') , alors $\Gamma' \cdot \Gamma''$ va de $(0, 0)$ à $(a' + a'', b' + b'')$. Par conséquent, si $\bar{\Gamma}$ présente une périodicité, il peut s'écrire $\bar{\Gamma} = \Gamma' \cdot \dots \cdot \Gamma'$, disons avec ℓ facteurs Γ' . Si Γ' va de $(0, 0)$ à (a', b') , alors $\bar{\Gamma}$ va de $(0, 0)$ à $(a'\ell, b'\ell)$. Ainsi, ℓ doit être un diviseur commun de $n + 1$ et de n , puisque $(n + 1, n)$ est l'extrémité du chemin $\bar{\Gamma}$. Or, si ℓ divise n et $n + 1$, il divise aussi leur différence 1 : $\ell = 1$. Cela signifie bien que $\bar{\Gamma}$ ne peut pas présenter de périodicité. Ainsi, le résultat de la question précédente s'applique : $\bar{\Gamma}$ a $2n + 1$ conjugués (c'est-à-dire la longueur de $\bar{\Gamma}$). On vérifie bien ceci dans l'exemple proposé.

4. Notons, pour tout k , d_k le nombre de pas à droites effectués lors des k premiers pas pour Γ' , et h_k le nombre de pas vers le haut effectués lors des k premiers pas. Les coordonnées des différents points du chemin sont donc (d_k, h_k) . Soit p réalisant le premier minimum de $h_k - d_k$

- Montrons pour commencer l'existence d'un chemin de Dyck Γ tel que $\bar{\Gamma}$ soit conjugué à Γ' .

Considérons le conjugué de Γ' obtenu à l'aide de cette valeur p ci-dessus, et $(d'_k, h'_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ l'ensemble des points de ce chemin conjugué.

On a donc :

- * Pour tout $k \in \llbracket 0, N - p \rrbracket$, $(d'_k, h'_k) = (d_{p+k} - d_p, h_{p+k} - h_p)$. Ainsi :

$$d'_k - h'_k = d_{p+k} - d_p - (h_{p+k} - h_p) = (h_p - d_p) - (h_{p+k} - d_{p+k}). \quad (1)$$

Par définition de p , pour tout $k > 0$, $h_{p+k} - d_{p+k} \leq h_p - d_p$. Par conséquent,

$$\forall k \in \llbracket 1, N - p \rrbracket, \quad d'_k - h'_k \geq 0.$$

* Pour tout $k \in \llbracket N - p + 1, N \rrbracket$,

$$(d'_k, h'_k) = (d_N - d_p + d_{k-N+p}, h_N - h_p + h_{k-N+p}).$$

Ainsi,

$$d'_k - h'_k = (d_N - h_N) - (d_p - h_p) + (d_{k-N+p} - h_{k-N+p}) = -1 - (d_p - h_p) + (d_{k-N+p} - h_{k-N+p}). \quad (2)$$

La maximalité de $(h_p - d_p)$, et la minimalité de p réalisant ce minimum, permet d'affirmer que, pour tout $k \in \llbracket N - p + 1, N - 1 \rrbracket$,

$$-(d_p - h_p) + (d_{k-N+p} - h_{k-N+p}) > 0, \quad \text{donc:} \quad d'_k - h'_k > -1 \quad \text{donc:} \quad d'_k - h'_k \geq 0.$$

Ainsi, tout le chemin est sous la diagonale, sauf le dernier point (égal à $(n, n + 1)$). Cela implique en particulier que le dernier pas est un pas montant, et que ce chemin s'écrit $\bar{\Gamma}$, où Γ est le chemin obtenu en supprimant ce dernier pas. Ce chemin Γ reste donc toujours sous la diagonale, et relie $(0, 0)$ à (n, n) . Il s'agit donc d'un chemin de Dyck de longueur $2n$.

- Montrons maintenant que tout autre choix de p pour la conjugaison amène un chemin qui ne reste pas sous la diagonale.
 - * Si p ne correspond pas à un maximum de $h_k - d_k$, alors il existe une valeur q pour laquelle $h_q - d_q > h - p - d_p$, et en injectant cette égalité soit dans (1) soit dans (2) selon que $q > p$ ou $q < p$, on obtient une valeur $k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ pour laquelle $d'_k - h'_k < 0$. Le chemin obtenu en enlevant le dernier pas n'est donc pas de Dyck.
 - * Si p correspond à un maximum, mais pas le premier, soit $q < p$ réalisant aussi un maximum. Alors, il existe une valeur de k dans $\llbracket N - p + 1, N - 1 \rrbracket$ telle que $(d_p - h_p) = (d_{k-N+p} - h_{k-N+p})$ (poser $k = q + N - p$), donc telle que $d'_k - h'_k < 0$. Encore une fois, ce chemin ne peut pas correspondre à un chemin de Dyck.

Ainsi, dans chaque classe de conjugaison, il existe un et un seul élément pouvant s'écrire $\bar{\Gamma}$, Γ étant un chemin de Dyck.

5. On en déduit maintenant facilement le nombre de chemins de Dyck. En effet, on peut construire une application :

$$\{\Phi : \text{chemins de } (0, 0) \text{ à } (n + 1, n)\} \longrightarrow \{\text{chemins de Dyck de longueur } 2n\},$$

en associant à un chemin Γ' le seul chemin de Dyck $\Phi(\Gamma')$ qui soit dans la classe de conjugaison de Γ' (après ajout d'un pas vers la droite au début du chemin).

Cette application est surjective : en effet soit Γ un chemin de Dyck, et $\bar{\Gamma}$ le chemin de $(0, 0)$ à $(n + 1, n)$ obtenu en rajoutant un pas sur la droite. Alors, $\bar{\Gamma}$ est conjugué à lui-même, et par définition de Φ , $\Phi(\bar{\Gamma}) = \Gamma$.

Montrons maintenant que les images réciproques ont toujours le même cardinal. En effet, l'image réciproque de Γ est la classe de conjugaison du chemin $\bar{\Gamma}$, dont le cardinal est $2n + 1$, d'après la question IV-3. Ainsi, ce cardinal est constant, et on peut appliquer le lemme du berger : le nombre de chemins de Dyck est égal au nombre total de chemins de $(0, 0)$ à $(n + 1, n)$ divisé par le cardinal commun des images réciproques :

$$\Gamma_n = \frac{1}{2n + 1} \binom{2n + 1}{n}.$$

On retrouve bien le résultat de la question III-6.

PARTIE V – Une formule combinatoire.

1. Soit E l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2k$ n'atteignant jamais la diagonale sauf en ses extrémités, et soit F l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2(k-1)$. On construit une application $\Phi : E \rightarrow F$ en supprimant le premier pas (forcément un pas vers la droite) et le dernier pas (forcément un pas vers le haut). Cela décale légèrement le chemin vers la gauche, mais comme il était strictement sous la diagonale au départ, il reste encore dessous, au sens large cette fois.

L'application réciproque consiste à ajouter à un chemin de Dyck de longueur $2(k-1)$ un pas vers la droite au début, et un pas vers le haut à la fin. Ces applications sont évidemment inverses l'une de l'autre.

On illustre ceci sur la figure 1. Dans cette figure, le premier chemin est un chemin de Dyck restant strictement au dessus de la diagonale, et le deuxième est le chemin de Dyck correspondant, obtenu en lui enlevant les pas extrémaux.



FIG. 1 – Passer d'un chemin de Dyck à un chemin de Dyck strict

2. Comptons les chemins de Dyck de longueur $2n$ et rencontrant la diagonale pour la première fois en (k, k) . Pour obtenir un tel chemin, il faut et il suffit de prendre un chemin de Dyck de longueur $2k$ ne rencontrant pas la diagonale (pour qu'il n'y ait pas d'intersection avant (k, k)), et de lui juxtaposer n'importe quel chemin de Dyck de longueur $2(n - k)$. Ces derniers sont au nombre de Γ_{n-k} , alors que les chemins de Dyck de longueur $2k$ restant strictement sous la diagonale sont, d'après la question précédente au même nombre que les chemins de Dyck de longueur $2(k - 1)$, c'est-à-dire Γ_{k-1} . Ainsi, le nombre de chemins de Dyck rencontrant la diagonale pour la première fois au point (k, k) sont au nombre de $\Gamma_{k-1}\Gamma_{n-k}$. En triant les chemins de Dyck suivant leur premier point d'intersection avec la diagonale, on obtient donc :

$$\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \Gamma_{k-1} \Gamma_{n-k}.$$

Le cas $k = n$ correspond aux chemins ne recontrant pas la diagonale ailleurs qu'en ses extrémités. En effectuant un changement de variables, cette somme se réécrit :

$$\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_k \Gamma_{n-1-k} = \sum_{\substack{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \\ k+\ell=n-1}} \Gamma_k \Gamma_\ell.$$