

Correction du Devoir Maison n° 13

(HEC 2004 – option économique)

Comme d'habitude, j'insiste sur la *concision*, source de clarté et de rigueur. Je fais moi-même un effort important de concision dans ma correction, pour vous montrer qu'une bonne copie ne comporte pas nécessairement 10 doubles-feuilles. Je précise qu'être concis demande parfois un réel effort, et nécessite d'avoir réussi à mettre ses idées au clair. La concision ne consiste pas à supprimer deux lignes de calcul sur trois et la moitié des justifications, mais à dégager l'essentiel d'une preuve, et à supprimer toute fioriture inutile.

PARTIE I – Un résultat utile

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est la probabilité d'un événement. Ainsi, par définition, $a_n \geq 0$.

Attention, $\mathbb{N}^*$ n'est pas l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X , l'énoncé affirme seulement que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Ainsi $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas forcément un système complet (certaines parts peuvent être vides). Mais $([X = n])_{n \in X(\Omega)}$ est un système complet, et $[X = n] = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N} \setminus X(\Omega)$. Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in X(\Omega)} P[X = n] = P(\Omega) = 1.$$

- (b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq a_n x^n \leq a_n$. Or $\sum a_n$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum a_n x^n$ converge.
2. (a) Soit $x \in [0, 1[$. On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique de raison $x \neq 1$, que l'on sait calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right) = \frac{f(1) - f(x)}{1-x}$$

On précise que pour la deuxième égalité, on peut séparer la somme en deux, car les deux séries convergent d'après la question précédente.

- (b) Soit $0 \leq x \leq y < 1$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $x^k < y^k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} x^k < \sum_{k=0}^{n-1} y^k$.

On somme ces inégalités pondérées par des coefficients positifs : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) < \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k \right)$.

Ainsi, $x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1-x}$ est croissante. Ses valeurs sur $[0, 1[$ sont donc plus petite que sa limite en 1^- , et supérieures à sa valeur en 0 :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq 1 = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \leq \frac{f(1) - f(x)}{1-x} \leq f'(1).$$

- (c) La série de la question 2a est à termes positifs, donc sa somme partielle est majorée par sa somme et est positive. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\sum_{n=1}^N \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \frac{f(1) - f(x)}{1-x} \leq f'(1).$$

L'expression de gauche étant une somme *finie*, on peut inverser la somme et la limite lorsque x tend vers 1^- . Par le théorème de prolongement des inégalités, on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^N (na_n) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(1) = f'(1).$$

La positivité découle du fait que tous les termes considérés sont positifs.

Par conséquent, la série $\sum na_n$ étant à termes positifs, et de somme partielle majorée (par $f'(1)$), elle converge.

Attention à ne pas intervertir limite et somme infinie ! De même, n'intervertissez pas dérivation et somme infinie. Dans les deux cas, une telle manipulation nécessite des justifications que vous n'êtes pas encore en mesure de donner.

(d) Pour tout $x \in [0, 1[$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \leq na_n$. Ainsi, d'après (2a) : $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$.

L'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$ résulte du passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question (2c). La positivité a été montrée dans la question (2b).

(e) X admet une espérance puisque la série $\sum nP[X = n] = \sum na_n$ converge, et que cette convergence est absolue, la série étant à termes positifs. De plus, puisque $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ tend vers $f'(1)$ lorsque x tend vers 1, le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'encadrement de la question (2d) donne : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = f'(1)$.

PARTIE II – Loi du temps d'attente de la première configuration « pile, pile, face »

1. Pour tout $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$, $U_n \subset U_{n+1}$, donc $P(U_n) \leq P(U_{n+1})$, donc $u_n \leq u_{n+1}$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (à partir du rang 3, et même du rang initial, après vérification). De plus, $u_n \leq 1$, car $P(U_n) \leq 1$ (par définition d'une probabilité). Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée par 1, elle converge.
2. (a) À chaque lancer, on a autant de chance d'obtenir « pile » que « face ». En particulier, cette description ne dépendant pas des tirages précédents, les résultats des différents lancers sont indépendants et donc :

$$P(B_n) = P(R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n) = P(R_{n-2}) \cdot P(R_{n-1}) \cdot P(S_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k et S_k sont incompatibles (on ne peut pas tirer à la fois « pile » et « face » au même tirage). Ainsi :

- $B_n \cap B_{n+1} = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \cap R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1} = \emptyset$ car R_n et S_n sont incompatibles ;
- $B_n \cap B_{n+2} = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \cap R_n \cap R_{n+1} \cap S_{n+2} = \emptyset$ car R_n et S_n sont incompatibles ;
- $B_{n+1} \cap B_{n+2} = R_{n-1} \cap R_n \cap S_{n+1} \cap R_n \cap R_{n+1} \cap S_{n+2} = \emptyset$ car R_{n+1} et S_{n+1} sont incompatibles ;

- (c) • $u_2 = 0$, donnée de l'énoncé.

• $u_3 = P(U_3) = P(B_3) = \frac{1}{8}$.

• $u_4 = P(U_4) = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4)$ (car événements incompatibles), donc $u_4 = \frac{1}{4}$.

- Non demandé dans l'énoncé, mais utile plus tard :

$$u_5 = P(U_4) = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{3}{8} \text{ (car 2 à 2 incompatibles, qu. (2b))}.$$

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 5.

- (a) $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) = U_{n-2} \cap B_{n+1}$, car B_{n-1} , B_n et B_{n+1} sont deux à deux incompatibles.

De plus, U_{n-2} ne fait intervenir que les lancers de rang dans $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$, alors que B_{n+1} ne fait intervenir que les lancers de rang $n-1$, n et $n+1$. Ainsi, U_{n-2} et B_{n+1} sont indépendants, et

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2}) \cdot P(B_{n+1}) = \frac{1}{8} \cdot u_{n-2}.$$

- (b) $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, donc, d'après la formule du crible :

$$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot u_{n-2} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

On vérifie cette relation pour $n = 3, 4$:

$$u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{1}{4} = u_4; \quad u_4 + \frac{1}{8}(1 - u_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{3}{8} = u_5.$$

- (c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite réelle ℓ (question 1). On passe à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$, soit $\ell = 1$.

De plus, $P[Y = 0] = P\left(\overline{\bigcup_{n \geq 3} B_n}\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n \geq 3} U_n}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n \geq 3} U_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n)$ (théorème des limites monotones, $(U_n)_{n \geq 3}$ étant croissante). Donc $P[Y = 0] = 0$.

4. (a) $v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = \frac{7}{8}, v_4 = \frac{3}{4}, v_5 = \frac{5}{8}$.

- (b) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1 - v_n$; donc, en remplaçant dans la relation de récurrence, pour tout $n \geq 3$,

$$1 - v_{n+1} = (1 - v_n) + \frac{1}{8}(1 - (1 - v_{n-2})) \quad \text{d'où} \quad v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}.$$

- (c) On somme les égalités $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$ entre 3 et $N+2$. On trouve :

$$\sum_{k=3}^{N+2} (v_k - v_{k+1}) = \frac{1}{8} \sum_{k=3}^{N+2} v_{k-2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{8} \sum_{k=1}^N v_k = v_3 - v_{N+3} = \frac{7}{8} - v_{N+3}.$$

- (d) Puisque u_n tend vers 1, v_n tend vers 0. Ainsi, $(8(\frac{7}{8} - v_{N+3}))_{N \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite égale à 7. La somme partielle $\sum_{k=1}^N v_k$ admet donc une limite égale à 7 : $\sum v_n$ converge, et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 7$.

5. (a) Pour tout $n \geq 1$, $v_n \geq 0$, car $u_n \leq 1$. Soit $0 \leq x \leq y \leq 1$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x^k \leq y^k$, puis $v_k x^k \leq v_k y^k$, et en sommant, $h(x) \leq h(y)$. Donc, h est croissante sur $[0, 1]$, et en particulier, $h(x) \leq h(1)$ si $x \in [0, 1]$.

L'autre inégalité provient de la positivité du terme général de la série définissant h .

- (b) La fonction h étant croissante, elle admet une limite à gauche en 1. Le théorème de prolongement des inégalités appliqué à l'encadrement précédent donne alors, lorsqu'on fait tendre x vers 1^- :

$$\sum_{k=1}^N v_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \leq h(1).$$

On fait maintenant tendre N vers $+\infty$: $h(1) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \leq h(1)$, d'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1)$.

- (c) Soit $n \geq 4$. L'événement $[Y = n]$ correspond à : « la configuration est apparue au moins une fois après n lancers, mais pas après $n-1$ lancers ». Ainsi, $[Y = n] = U_n \setminus U_{n-1}$. Par conséquent, puisque $U_{n-1} \leq U_n$, pour tout $n \geq 4$, $c_n = P[Y = n] = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n$.

Pour $n = 3$, $c_3 = P[Y = 3] = P(U_3) = \frac{1}{8} = v_2 - v_3$. Pour $n = 2$, $c_2 = 0 = v_1 - v_2$.

(d) C'est une bête manipulation de sommes. La deuxième égalité résulte de $c_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=2}^{+\infty} (v_{k-1} - v_k) x^k \quad (\text{question (5c)}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^{k+1} - \sum_{k=2}^{+\infty} v_k x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^{k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^k + x \quad (\text{car } v_1 = 1) \\
&= x + (x-1) \sum_{k=1}^{+\infty} v_k x^{k+1} = x + (x-1)h(x).
\end{aligned}$$

(e) L'égalité précédente appliquée à $x = 1$ donne : $g(1) = 1$. De la même égalité, on déduit alors : $\frac{g(1)-g(x)}{1-x} = h(x)+1$. D'après la question (5b), $h+1$ admet une limite en 1^- égale à 8. Par conséquent, g est dérivable en 1, et $g'(1) = 8$. On en déduit, grâce à la question I-2e, que Y admet une espérance, et $E(Y) = g'(1) = 8$.

PARTIE III – Paradoxe de Walter Penney (1969)

1. (a) Soit $n \geq 3$. Les événements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} sont deux à deux incompatibles : même vérification que pour B_n, B_{n+1} et B_{n+2} (question II-2b), je vous laisse faire.
- (b) Les événements B'_n, B'_{n+1} et B'_{n+2} étant incompatibles, on peut faire exactement le même raisonnement que pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: la suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et les termes initiaux sont les mêmes (il faut le vérifier sur 3 termes, puisque la relation est d'ordre 3). Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $u_n = u'_n$. Ainsi :

$$P[Y = n] = P(U_n \setminus U_{n-1}) = u_n - u_{n-1} = u'_n - u'_{n-1} = P(U'_n \setminus U'_{n-1}) = P[Y' = n].$$

Par conséquent, Y et Y' suivent la même loi, et ont donc même espérance.

2. (a) $G_3 = U_3$, donc $g_3 = u_3 = \frac{1}{8}$.
 G_4 : la seule séquence possible est « pile, pile, pile, face ». En effet, si le premier lancer est « face », J' gagne. Ainsi, $g_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.
De même, pour que J gagne avec n lancers, il ne faut avoir tiré que des « pile » avant le « face » du n -ième tirage. En effet, si « face » apparaît avant la configuration « pile, pile, face », alors il n'a été tiré que des piles (et au moins 2) entre le dernier de ces « face » et le « face » final. Ainsi, la configuration « face, pile, pile » apparaît avant le rang n et J' gagne, empêchant G_n . Les n lancers sont donc déterminés, d'où $g_n = \frac{1}{2^n}$.
- (b) Les événements $(G_n)_{n \geq 3}$ sont 2 à 2 incompatibles, d'où la probabilité p_J de victoire de J :

$$p_J = P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} g_n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \quad (\sigma\text{-additivité})$$

3. (a) Soit D_n l'événement : *lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux « pile » consécutifs*.
 $d_1 = 1$ (un seul lancer, donc pas deux « pile » consécutifs!).
 $d_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, car la seule façon que D_2 ne soit pas réalisé est que les deux lancers soient « pile ».
La formule des probabilités totales appliquée avec le système complet $\{R_1, S_1\}$ donne :

$$d_{n+2} = P(D_{n+2}) = P(D_{n+2}|R_1)P(R_1) + P(D_{n+2}|S_1)P(S_1) = \frac{1}{2}P(D_{n+2}|R_1) + \frac{1}{2}P(D_{n+2}|S_1).$$

Or, si le premier tirage est « face », l'événement D_{n+2} est réalisé, si et seulement si on n'obtient pas deux « pile » consécutifs sur les $n+1$ tirages suivants. Ainsi, $P(D_{n+2}|S_1) = P(D_{n+1}) = d_{n+1}$.

Le même raisonnement ne s'applique pas à $P(D_{n+2}|R_1)$, (le deuxième tirage *doit* être « pile »). On applique la formule des probabilités totales, avec le système complet $\{R_2, S_2\}$:

$$P(D_{n+2}|R_1) = P(D_{n+2}|R_1 \cap R_2)P(R_2) + P(D_{n+2}|R_1 \cap S_2)P(S_2) = \frac{1}{2}P(D_{n+2}|R_1 \cap S_2),$$

car D_{n+2} ne peut bien sûr pas être réalisé si on a tiré deux fois « pile » aux deux premiers tirages ! Comme précédemment, $P(D_{n+2}|R_1 \cap S_2) = P(D_n)$. On obtient bien au final, $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$.

(b)

```
program calculdn;
uses crt;
var d,e,f:real;
var i,n:integer;
begin
  clrscr;
  write('Quel rang de la suite d(n) voulez-vous calculer ? ');
  readln(n);
  if n <= 0
    {test de compatibilité de la donnée}
  then write('d(',n,') non défini !')
  else
    begin
      d:=1;
      {initialisation d=d(1), e=d(2)}
      e:=3/4;
      for i:=3 to n do
        {au début de la boucle i, d=d(i-2), e=d(i-1)}
        begin
          f:=e/2+d/4;
          {calcul de d(i), pas mis tout de suite dans e}
          d:=e;
          {pour ne pas écraser la valeur de d(i-1)}
          e:=f;
        end;
        {A la fin de la boucle i, d=d(i-1), e=d(i)}
        {Donc, à la fin de la boucle n, e=d(n)}

        if n=1
          {Cas particulier de n=1: (aucun passage dans la boucle)}
        then write('d(1)=1')
        {Dans ce cas, d(n) n'est pas dans e qui contient d(2)}
        else
          {Dans les autres cas (y compris n=2),}
          write('d(',n,')=',e); {on affiche e, égal à d(n) si n>=2}
        end;
      end.
```

(c) Le polynôme caractéristique associé à la récurrence définissant $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $P(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$. Un calcul niveau seconde donne ses deux racines

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ainsi, il existe deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

On peut d'ores et déjà calculer la limite de d_n . En effet, puisque $\sqrt{5} < 3$, $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$. Par conséquent, $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\mu^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendent vers 0, donc $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi.

On en déduit également que $\sum d_n$ converge (somme de deux séries géométriques convergentes)

Pour trouver la valeur de la somme, il faut calculer α et β , grâce aux conditions initiales. **Astuce** : Si on considère les relations obtenues aux rangs 1 et 2, les expressions vont être compliquées. On peut

remarquer que si on pose $d_0 = 1$, la relation de récurrence est vérifiée à partir du rang 0. Ainsi :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \beta \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 1, \end{cases}$$

et un calcul sans difficulté amène : $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}$ et $\beta = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

$$\text{Donc : } \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^n - 1.$$

$$\text{Or : } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{4}} = 3 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}} = 3 + \sqrt{5}.$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{(5 - 3\sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{10} + \frac{(5 + 3\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{10} - 1 = \frac{30 - 14\sqrt{5}}{10} + \frac{30 + 14\sqrt{5}}{10} - 1 = 5.$$

4. (a) Pour que $[T > n] \cup [T = 0]$ soit vérifié (pas encore de gagnant après n tirages), il faut et il suffit que :
- soit à aucun moment dans les n premiers tirages deux « pile » successifs n'aient été tirés ; cela correspond à l'événement D_n de probabilité d_n ;
 - soit deux « pile » successifs ont été tirés dans les n premiers tirages, mais alors tous les tirages ont donnés « pile » (probabilité : $\frac{1}{2^n}$). En effet, dans le cas contraire, il existe un « face » précédant directement, ou suivant directement une succession d'au moins deux « pile », et J ou J' a gagné après au plus n lancers.

Les deux événements décrits ainsi étant incompatibles, on obtient : $P([T > n] \cup [T = 0]) = d_n + \frac{1}{2^n}$.

Ainsi, pour tout $n > 2$, $P[T = n] = P([T > n-1] \cup [T = 0]) - P([T > n] \cup [T = 0]) = d_{n-1} - d_n + \frac{1}{2^n}$.

Pour $n = 1$ et $n = 2$, on a bien entendu $P[T = 1] = 0$ et $P[T = 2] = 0$.

- (b) De manière équivalente, il faut montrer que l'événement $[T = 0]$ est quasi-impossible. Or

$$P[T = 0] = P\left(\bigcap_{n=3}^{+\infty} ([T > n] \cup [T = 0])\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P([T > n] \cup [T = 0]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n + \frac{1}{2^n}.$$

(théorème des limites monotones). Comme la limite de d_n est nulle, on trouve : $P[T = 0] = 0$.

5. Par conséquent, en considérant le système complet (le joueur J gagne ; le joueur J' gagne ; aucun joueur ne gagne), la probabilité p de victoire de J' est $p_{J'} = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4}$.
Conclusion : il vaut mieux être le joueur J' que le joueur J !

6. Si la configuration gagnante du joueur J avait été « pile, pile, face, pile, pile, face » et celle du joueur J' « face, face, pile, face, face, pile », le jeu aurait été complètement symétrique (en inversant « pile » et « face ») : aucun joueur n'est avantage. La probabilité de victoire de chacun est $\frac{1}{2}$.

7. Soit, pour tout $x \in [0, 1]$, $d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$ et $t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P[T = n] x^n$.

- (a) La fonction $x \mapsto d_n x^n$ est croissante sur $[0, 1]$ (car d_n est positif). Donc, d est croissante (mais pas forcément continue). Cela implique déjà l'existence de la limite à gauche en 1. Comme pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq d_n x^n \leq d_n$, on a une inégalité, valable pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N d_n x^n \leq d(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque x tend vers 1^- ,

$$\sum_{n=1}^N d_n \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} d(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} d_n.$$

Par conséquent, cette encadrement étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on peut passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$. On obtient donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} d(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n = d(1).$$

(b) On utilise l'expression de $P[T = n]$ en fonction de d_n et d_{n-1} trouvée dans la question précédente :

$$t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P[T = n]x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} P[T = n]x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (d_{n-1} - d_n + \frac{1}{2^n})x^n.$$

Chacune des sommes considérées convergeant pour $x \in [0, 1]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} t(x) &= \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1}x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} d_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} d_n x^n + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1 - \frac{x}{2}} \\ &= xd(x) - x^2 d(1) - d(x) + xd(1) + x^2 d(2) + \frac{x^3}{4(2-x)} \\ &= (x-1)d(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4(2-x)} + x = (x-1) \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x. \end{aligned}$$

(c) $([T = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant un système quasi-complet (question (4b)), on a $t(1) = 1$. Ainsi,

$$\frac{t(x) - t(1)}{x - 1} = \frac{(x-1) \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} \right) + x - 1}{x - 1} = d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1.$$

Puisque $x \mapsto \frac{x^2}{2(2-x)}$ est continue en 1, et que d admet une limite à gauche en 1 d'après la question (7a), le taux d'accroissement $x \mapsto \frac{t(x) - t(1)}{x - 1}$ admet une limite à gauche en 1. Ainsi, d'après la question I-2e, T admet une espérance, et cette espérance vaut :

$$E(T) = t'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(d(x) + \frac{x^2}{2(2-x)} + 1 \right) = d(1) + \frac{1}{2} + 1 = 5 + \frac{1}{2} + 1 = 6.5$$

En effet, on avait calculé $d(1)$ dans la question (3c).

PARTIE IV – Simulation informatique

1. (a)

k	0	1	2	3	4	5
r		1	1	1	1	0
x	0	1	2	2	2	3
y	0	0	0	0	0	1

(b)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r		1	0	1	0	0	0	1	1
x	0	1	0	1	0	0	0	1	2
y	0	0	1	2	1	1	1	2	3

(c)

k	0	1	2	3	4	5	6	7
r		0	1	0	1	0	1	1
x	0	0	1	0	1	0	1	2
y	0	1	2	1	2	1	2	3

2. L'entier k représente à la fin du programme la valeur de la variable aléatoire T , c'est-à-dire le rang où la victoire pour l'un ou l'autre des deux joueurs se décide; $x = 3$ si et seulement si une configuration « 1, 1, 0 », c'est-à-dire « pile, pile, face », vient de produire; $y = 3$ si et seulement si une configuration « face, pile, pile » vient de se produire. Le programme s'arrête dès que $x = 3$ ou $y = 3$, c'est-à-dire dès que le joueur J ou le joueur J' a gagné. Si $x = 3$ à la fin du programme, le joueur J a gagné, sinon, c'est le joueur J' . Ainsi, on peut réécrire la dernière instruction :

```
if x=3 then write('J a gagné en ',k,' coups) else write('J' a gagné en ',k,' coups');
```

Attention à la double apostrophe pour le prime!

Notez que le programme ne s'arrête pas forcément, mais il finit presque sûrement par s'arrêter.