Lycée Carnot
ECS 4 – Mathématiques
A. Troesch

Mai 2007

Correction du Devoir Maison n° 14

Étude de la vitesse de convergence des séries de Riemann

1. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $\alpha > 1$.
   (a) En s'inspirant du cours : $\forall n \geqslant 2,\quad \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (car $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[n, n+1]$), donc
   $$\forall n \geqslant 2,\quad \forall N > n,\quad \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha(n-1)^{\alpha-1}},$$
   On obtient le résultat en faisant tendre N vers $+\infty$.

   (b) Soit $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Alors, $n^\alpha |u_n|$ tend vers 0, et $\sum u_n$ converge absolument d'après la règle de Riemann.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{n^\alpha}$, et donc $|R_n| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, Ainsi, d'après la définition par ε des o, $R_n = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right) = o\left(O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right) = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

   (c) Pour tout $n \geqslant 2$, on a :
   $$\begin{aligned} v_{n-1} - v_n &= \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right)\right) \end{aligned}$$
   Ainsi, en utilisant un DL de $(1+y)^\alpha$ au voisinage de 0, on obtient, lorsque n tend vers $+\infty$:
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \left(1 + (\alpha-1)\frac{1}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(-\frac{\alpha}{2n^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+3}}\right) \end{aligned}$$

   (d) On en déduit, en sommant entre $n+1$ et $+\infty$, pour tout $n \geqslant 2$:
   $$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = v_n + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_{k-1} - v_k) \qquad \text{car } v_n \text{ tend vers } 0 \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n, \qquad (1) \end{aligned}$$
   où $u_n = o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$. D'après les questions 2a et 2b, les trois sommes de droite sont respectivement en $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$. Toutes les trois sont donc en $o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$. Ainsi, on a, lorsque n tend vers $+\infty$:
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

(e) Cette égalité est vraie pour tout $\alpha > 1$, donc notamment pour $\alpha + 1$. On peut la réinjecter dans l'équation (1) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{(\alpha)n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

les autres sommes étant, d'après ce qui précède, en $o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

(f) Encore une fois, cette égalité est aussi valable pour $\alpha+1$ et $\alpha+2$, et on peut la réinjecter dans (1) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).\end{aligned}$$

3. On étudie maintenant la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha = 1$.

(a) $w_n - w_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
donc $\sum w_n - w_{n-1}$ converge d'après Riemann. Or, c'est une série téléscopique, de somme partielle $w_N - w_1$. Par conséquent, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite γ, et donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \ln n = w_n - w_1 = \sum_{k=2}^{n}(w_n - w_{n-1}) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \varepsilon_k\right)$$

où $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$).

(c) La série $\sum \frac{1}{2k^2}$ est, à une constante près, une série de Riemann convergente ; de même pour $\sum \frac{1}{3k^3}$. Quant à $\sum \varepsilon_k$, elle converge absolument, d'après la règle de comparaison des séries par o. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 - \ln n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \varepsilon_k\right)\right).$$

D'après la question précédente, cette limite vaut $\gamma - 1$, et par conséquent,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k = 1 - \gamma.$$

(d) Par conséquent, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k \\ &= \ln n + 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\ &= \ln n + 1 - 1 + \gamma + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\ &= \ln n + \gamma + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k.\end{aligned}$$

D'après la question (2f), on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. (a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Alors, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{n^\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n^\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1 + (\alpha-1)\frac{1}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1\right) \\
&= -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\frac{1}{n^{\alpha-2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right).
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, cela implique que $w_n - w_{n-1} \sim -\frac{\alpha}{2}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, terme général de signe constant d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum(w_n - w_{n-1})$ converge, c'est à dire : la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite γ_α. On a alors bien l'égalité voulue.

(b) En sommant l'égalité obtenue dans la question précédente de 2 à n, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - 1 = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\frac{1}{k^{\alpha+2}} - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k$$

où $\varepsilon_k = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right)$. Par le même raisonnement que pour le cas $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\
&= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha n^\alpha} - \frac{1}{2n^{\alpha+1}}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{6} \cdot \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \\
&= \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).
\end{aligned}$$