LYCÉE CARNOT
ECS 4 – Mathématiques
A. TROESCH

Pour le 22 septembre 2006

Correction du Devoir Maison n° 2

Problème 1 – Images directes et images réciproques de parties

Soit E et E' deux ensembles, $f : E \longrightarrow E'$ une application.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.
   (a) Supposons que $A \subset B$, et soit $y \in f(A)$. Par définition de $f(A)$, il existe x dans A tel que $f(x) = y$. Comme $A \subset B$, on a aussi $x \in B$, et par conséquent, $y = f(x) \in f(B)$. Ainsi, pour tout y, $y \in f(A)$ entraîne $y \in f(B)$, donc $f(A) \subset f(B)$.
   (b) On procède par double-inclusion.
   - Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Soit un tel x :
     $*$ soit $x \in A$, et donc $f(x) \in f(A)$;
     $*$ soit $x \in B$, et donc $f(x) \in f(B)$.
     Ainsi, $f(x)$ est soit dans $f(A)$ soit dans $f(B)$, donc $y \in f(A) \cup f(B)$. Par conséquent, on obtient l'inclusion $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
   - Soit $y \in f(A) \cup f(B)$:
     $*$ soit $y \in f(A)$ et donc il existe x dans A (et donc aussi dans $A \cup B$) tel que $f(x) = y$;
     $*$ soit $y \in f(B)$ et donc il existe x dans B (et donc aussi dans $A \cup B$) tel que $f(x) = y$;
     Ainsi, dans les deux cas, il existe x dans $A \cup B$ tel que $f(x) = y$, donc $y \in f(A \cup B)$. Cela étant vrai pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$, on en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

   Les deux inclusions ci-dessus amènent : $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.
   (c) Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Ainsi :
   - $x \in A$, donc $y \in f(A)$;
   - $x \in B$, donc $y \in f(B)$.

   Par conséquent, y est dans $f(A) \cap f(B)$. Ainsi, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Montrons que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) f est injective
   (ii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f\left(\complement_E A\right) \subset \complement_{E'} f(A)$.
   - (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons que f est injective. Soit alors A et B des sous-ensembles quelconques de E.
     $*$ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ d'après la question précédente.
     $*$ Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors $y \in f(A)$, et il existe donc $x \in A$ tel que $f(x) = y$. De même, $y \in f(B)$, et il existe donc $x' \in B$ tel que $f(x') = y$. On a donc $f(x) = f(x')$, et comme f est injective, $x = x'$. Ainsi, $x \in A \cap B$, donc $y \in f(A \cap B)$. On en déduit l'inclusion : $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
     Les deux inclusions ci-dessus amènent : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   - (ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons que (ii) est vérifié. Soit A un sous-ensemble de E. Alors $A \cap \complement_E A = \varnothing$, donc $f\left(A \cap \complement_E A\right) = \varnothing$. D'après (ii), il en résulte que $f(A) \cap f\left(\complement_E A\right) = \varnothing$, donc que $f\left(\complement_E A\right) \subset \complement_{E'} f(A)$.
   - (iii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons que (iii) est vérifié. Montrons que f est injective. Pour cela, consiédérons x et y deux éléments quelconques de E tels que $x \neq y$. Ainsi, $y \in \complement_E\{x\}$. Par conséquent, $f(y) \in f\left(\complement_E\{x\}\right)$, et d'après (iii), $f(y) \in \complement_{E'} f(\{x\})$. Ainsi, $f(y) \neq f(x)$. Par conséquent, f est injective.
3. Soit A' et B' dans $\mathcal{P}(E')$:
   (a) Supposons que $A' \subset B'$. Soit $x \in f^{-1}(A')$. Alors, par définition, $f(x) \in A'$, et donc $f(x) \in B'$. L'élément x est donc l'antécédent d'un élément de B', donc $x \in f^{-1}(B')$. Ainsi, $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.
   (b) On procède par double-inclusion.
   - Soit $x \in f^{-1}(A' \cup B')$. Alors, par définition, $f(x) \in A' \cup B'$. Ainsi :
     $*$ soit $f(x) \in A'$, et donc $x \in f^{-1}(A')$;
     $*$ soit $f(x) \in B'$, et donc $x \in f^{-1}(B')$.

Ainsi, $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$. Ceci étant vrai pour tout x de $f^{-1}(A' \cup B')$, on a montré l'inclusion : $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

- Soit $x \in f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$. Alors :
  * soit $x \in f^{-1}(A')$, donc $f(x) \in A'$, donc $f(x) \in A' \cup B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cup B')$;
  * soit $x \in f^{-1}(B')$, donc $f(x) \in B'$, donc $f(x) \in A' \cup B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cup B')$.

  Dans les deux cas, $x \in f^{-1}(A' \cup B')$. Ainsi, $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$.

Les deux inclusions ci-dessus montrent l'égalité : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

(c) On procède par double-inclusion.
- Soit $x \in f^{-1}(A' \cap B')$. Alors $f(x) \in A' \cap B'$. Ainsi :
  * $f(x) \in A'$, donc $x \in f^{-1}(A')$;
  * $f(x) \in B'$, donc $x \in f^{-1}(B')$.

  Par conséquent, $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$. Il en résulte que $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
- Soit $x \in f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$. Alors :
  * $x \in f^{-1}(A')$, donc $f(x) \in A'$;
  * $x \in f^{-1}(B')$, donc $f(x) \in B'$.

  Par conséquent, $f(x) \in A' \cap B'$, donc $x \in f^{-1}(A' \cap B')$.
  On en déduit l'inclusion : $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A \cap B)$.

Les deux inclusions précédentes amènent : $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

(d) On procède encore une fois par double-inclusion.
- Soit $x \in f^{-1}\left(\complement_{E'} A'\right)$. Alors $f(x) \in \complement_{E'} A'$, donc $f(x) \notin A'$. Par conséquent, x n'est pas l'antécédent d'un élément de A', donc $x \notin f^{-1}(A')$. Il en résulte que $x \in \complement_E f^{-1}(A')$.
  Ainsi, $f^{-1}\left(\complement_{E'} A'\right) \subset \complement_E f^{-1}(A')$.
- Soit $x \in \complement_E f^{-1}(A')$. Ainsi, $x \notin f^{-1}(A')$, donc $f(x) \notin A'$, donc $f(x) \in \complement_{E'} A'$. Par conséquent, $x \in f^{-1}\left(\complement_{E'} A'\right)$. On a donc : $\complement_E f^{-1}(A') \subset f^{-1}\left(\complement_{E'} A'\right)$.

Les deux inclusions ci-dessus amènent l'égalité : $f^{-1}\left(\complement_{E'} A'\right) = \complement_E f^{-1}(A')$.

(e) Encore une démonstration par double-inclusion.
- Soit $x \in f^{-1}(A' - B')$. Alors $f(x) \in A' - B'$, donc $f(x) \in A$ (soit $x \in f^{-1}(A')$), et $f(x) \notin B'$ (soit $x \notin f^{-1}(B')$) Ainsi, $x \in f^{-1}(A') - f^{-1}(B')$. Par conséquent, $f^{-1}(A' - B') \subset f^{-1}(A') - f^{-1}(B')$.
- Soit $x \in f^{-1}(A') - f^{-1}(B')$. Alors $x \in f^{-1}(A')$, donc $f(x) \in A'$, et $x \notin f^{-1}(B')$, donc $f(x) \notin B'$. Ainsi, $f(x) \in A' - B'$, puis $x \in f^{-1}(A' - B')$. On en déduit que : $f^{-1}(A') - f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' - B')$.

Les deux inclusions ci-dessus amènent l'égalité : $f^{-1}(A') - f^{-1}(B') = f^{-1}(A' - B')$.

4. (a) Soit A un sous-ensemble de E, et $x \in A$. Alors, $f(x) \in f(A)$, par définition, et donc x est l'antécédent par f d'un élément de $f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. On en déduit que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) On montre les deux implications.
- Supposons que f est injective. Soit alors A un sous-ensemble de E.
  * D'après la question précédente, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
  * Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$. Il existe donc par définition $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$, puis que $x \in A$. Ainsi, $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

  Les deux inclusions ci-dessus amènent l'égalité : $A = f^{-1}(f(A))$.
- On suppose que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$. Soit alors x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Ainsi, $y \in f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(\{x\}))$. D'après l'hypothèse, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, donc $y \in \{x\}$, puis $y = x$. Ainsi, f est injective.

5. (a) Soit A' un sous-ensemble de E', et soit $y \in f(f^{-1}(A'))$. Ainsi, il existe $x \in f^{-1}(A')$ tel que $f(x) = y$. Or, puisque $x \in f^{-1}(A')$, on a $f(x) \in A'$. Ainsi, $y \in A'$. On a montré : $f(f^{-1}(A')) \subset A'$.

(b)
- Supposons que f est surjective. Soit alors A' une sous-ensemble de E, et montrons que l'on a : $A' \subset f(f^{-1}(A'))$. Pour ce faire, considérons $y \in A'$. Alors, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $y \in A'$, il en résulte que $x \in f^{-1}(A')$. Ainsi, $f(x) \in f(f^{-1}(A'))$, donc $y \in f(f^{-1}(A'))$. Nous avons donc démontré que $A' \subset f(f^{-1}(A'))$. L'inclusion réciproque provenant de la question précédente, on en déduit l'égalité.
- Supposons que pour tout $A' \subset E$, $f(f^{-1}(A')) = A'$. Il s'agit de montrer que f est surjective, donc que : $\forall y \in E', \exists x \in E, \ f(x) = y$. Soit donc $y \in E'$. D'après l'hypothèse, on a : $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. En particulier, $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$, puisque $f(\varnothing) = \varnothing$. Ainsi, y admet un antécédent x au moins. Cela prouve la surjectivité de f.

6. (a) Soit A un sous-ensemble de E.
   - D'après la question 5(a), on a $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$.
   - Par ailleurs, d'après la question 4(a), $A \subset f^{-1}(f(A))$, donc, d'après la question 1(a), il vient : $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A))$.

   Les deux inclusions ci-dessus montrent l'égalité : $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.

   (b) Soit A' un sous-ensemble de E'.
   - D'après la question 4(a), $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(f(f^{-1}(A')))$.
   - D'après la question 5(a), $f(f^{-1}(A')) \subset A'$, donc, d'après la question 3(a), on obtient l'inclusion suivante : $f^{-1}(f(f^{-1}(A'))) \subset f^{-1}(A')$.

   Les deux inclusions ci-dessous amènent : $f^{-1}(f(f^{-1}(A'))) = f^{-1}(A')$.

7. Soit A un sous-ensemble de E et A' un sous-ensemble de E'.
   - D'après la question 1(c), $f(A \cap f^{-1}f(A')) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(A'))$, puis, d'après la question 5(a) : $f(A \cap f^{-1}f(A')) \subset f(A) \cap A'$.
   - Soit $y \in f(A) \cap A'$. Alors $y \in f(A)$, donc il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme $y \in A'$, on a alors aussi $x \in f^{-1}(A')$. Ainsi, $x \in A \cap f^{-1}(A')$, puis $y \in f(A \cap f^{-1}(A')$. On a donc montré : $f(A) \cap A' \subset f(A \cap f^{-1}(A'))$.

   Les deux inclusions ci-dessus amènent l'égalité.

8. Soit G un ensemble et $g : F \longrightarrow G$ une application.

   (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Procédons par double inclusion.
   - Soit $y \in (g \circ f)(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$. Ainsi, il existe z dans $f(A)$ (par exemple $z = f(x)$) tel que $y = f(z)$. Par conséquent, $y \in g(f(A))$. Ainsi, $(g \circ f)(A) \subset g(f(A))$.
   - Soit $y \in g(f(A))$. Ainsi, il existe $z \in f(A)$ tel que $y = g(z)$. Comme $z \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $z = f(x)$. Ainsi, $y = g(f(x)) = g \circ f(x)$. On en conclut que $y \in (g \circ f)(A)$. D'où : $g(f(A)) \subset (g \circ f)(A)$.

   Les deux inégalités précédentes amènent l'égalité.

   (b) Soit $A'' \in \mathcal{P}(G)$.
   - Soit $x \in (g \circ f)^{-1}(A'')$. Ainsi $g \circ f(x) \in A''$, donc $g(f(x)) \in A''$. On en déduit que $f(x) \in g^{-1}(A'')$, puis $x \in f^{-1}(g^{-1}(A''))$. Ainsi, $(g \circ f)^{-1}(A'') \subset f^{-1}(g^{-1}(A''))$.
   - Soit $x \in f^{-1}(g^{-1}(A''))$. Alors $f(x) \in g^{-1}(A'')$, donc $g \circ f(x) \in A''$. Ainsi, $x \in (g \circ f)^{-1}(A'')$. Par conséquent, $f^{-1}(g^{-1}(A'')) \subset (g \circ f)(A'')$.

   Les deux inclusions ci-dessus prouvent l'égalité.

Problème 2 – Généralisation des notions d'injectivité et de surjectivité à des relations quelconques

1. Soit A et B deux sous-ensembles de E.

   (a) Supposons que $A \subset B$. Montrons qu'alors $\mathcal{R}^+(A) \subset \mathcal{R}^+(B)$. Pour cela, considérons un élément $y \in \mathcal{R}^+(A)$. Par définition, il existe $a \in A$ tel que $a\mathcal{R}y$. Comme $A \subset B$, a est aussi dans b, donc il existe $b \in B$ tel que $b\mathcal{R}y$. Ainsi, $y \in \mathcal{R}^+(B)$. On en déduit que $\mathcal{R}^+(A) \subset \mathcal{R}^+(B)$.

   (b) Soit $y \in \mathcal{R}^+(A \cup B)$. Ainsi, il existe $a \in A \cup B$ tel que $a\mathcal{R}y$. Alors :
   - Soit $a \in A$, et dans ce cas, $y \in \mathcal{R}^+(A)$;
   - Soit $a \in B$, et dans ce cas, $y \in \mathcal{R}^+(B)$.

   (Ces deux éventualités ne sont pas exclusives).

   On en déduit que $y \in \mathcal{R}^+(A) \cup \mathcal{R}^+(B)$. Ainsi, on a montré : $\mathcal{R}^+(A \cup B) \subset \mathcal{R}^+(A) \cup \mathcal{R}^+(B)$.

   (c) Soit $y \in \mathcal{R}^+(A \cap B)$. Ainsi, il existe $a \in A \cap B$ tel que $a\mathcal{R}y$. Alors :
   - on a : $a \in A$, et donc, $y \in \mathcal{R}^+(A)$;
   - on a : $a \in B$, et donc, $y \in \mathcal{R}^+(B)$.

   On en déduit que $y \in \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$. Ainsi, on a montré : $\mathcal{R}^+(A \cap B) \subset \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$.

2. Considérons la relation $\mathcal{R}^{-1}$ de F vers E. Alors, pour tout sous-ensemble L de F :

$$\mathcal{R}^-(L) = \{x \in E,\ \exists \ell \in L,\ x\mathcal{R}\ell\} = \{x \in E,\ \exists \ell \in L,\ \ell\mathcal{R}^{-1}x\} = (\mathcal{R}^{-1})^-(L).$$

   Les points (a), (b) et (c) résultent de manière immédiate de cette remarque et de la question 1.

   (Il fallait bien sûr lire $\mathcal{R}^-$ au lieu de $\mathcal{R}^+$ dans toutes les expressions.)

3. (a) Soit $\mathcal{R}$ une relation de type 1 et 2. Alors tout élément de E est en relation avec un et un seul élément de F. On reconnaît la définition d'une application de E dans F.

   (b) Soit $\mathcal{R}$ une relation définissant une application f (donc $\mathcal{R}$ est de type 1 et 2).
   - Supposons que $\mathcal{R}$ soit de type 3. Ainsi, tout élément de F est en relation avec au plus un élément de E, autrement dit, tout élément de F admet au plus un antécédent par f. L'application f est donc injective.
   - De même, si $\mathcal{R}$ est de type 4, tout élément de F admet au moins un antécédent par f, donc f est surjective.

   (c) Tout d'abord $\mathcal{T}$ définit une application. On montre cela en deux temps.
   - $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ de type 1 $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ de type 1.
     En effet, supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 1. Soit $x \in E$. Soit x n'est en relation par $\mathcal{T}$ avec aucun élément de G, soit il existe $z \in G$ tel que $x\mathcal{T}z$. Dans ce dernier cas, montrons que z est unique. Soit un tel élément z. Il existe donc $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$. Soit z' un autre élément de G tel que $x\mathcal{T}z'$. Il existe donc $y' \in F$ tel que $x\mathcal{R}y'$ et $y'\mathcal{R}z'$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 1, $y' = y$, puis, comme $\mathcal{S}$ est de type 1, $z' = z$. Ainsi, z est le seul élément de G en relation avec x.
   - $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ de type 2 $\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ de type 2.
     En effet, soit $x \in E$. Il existe y tel que $x\mathcal{R}y$, puis z tel que $y\mathcal{R}z$ (car $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 2). Donc il existe z tel que $x\mathcal{T}z$, ce qui signifie que $\mathcal{T}$ est de type 2.

   Ainsi, $\mathcal{T}$ est à la fois de type 1 et de type 2 ; il s'agit donc d'une application.

   Par ailleurs, soit $x \in E$, et z l'unique élément de G tel que $x\mathcal{T}z$. D'après ce qui précède, il existe un unique $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. La première correspondance amène : $y = f(x)$; la seconde amène : $z = g(y)$. Ainsi, on a bien $z = g \circ f(x)$, ce qui prouve que $\mathcal{T}$ est la relation associée à l'application $g \circ f$.

   (d) On a déjà montré dans la question précédente que la composée de deux relations de type 1 (resp. de type 2) est une relation de type 1 (resp. de type 2). Étudions donc le cas des types 3 et 4. On note comme précédemment $\mathcal{T}$ la composée de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.
   - Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 3. Soit $z \in F$. Montrons que s'il existe un élément $x \in E$ tel que $x\mathcal{T}z$, alors cet élément est unique. Soit donc x et x' deux tels éléments. Il s'agit de montrer que $x = x'$. Par définition de $\mathcal{T}$, il existe $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$, et il existe y' tel que $x'\mathcal{R}y'$ et $y'\mathcal{S}x$. Puisque $\mathcal{S}$ est de type 3, $y = y'$ (unicité d'un « antécédent » de z). Par conséquent, $\mathcal{R}$ étant de type 3, $x' = x$ (unicité d'un « antécédent » de y). D'où l'unicité de x, sous réserve d'existence. La relation $\mathcal{T}$ est donc de type 3.
   - Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont de type 4. Soit $z \in G$. Comme $\mathcal{S}$ est de type 4, il existe $y \in F$ tel que $y\mathcal{S}z$. Soit un tel y. Comme $\mathcal{R}$ est de type 4, il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Alors, par définition de $\mathcal{T}$, un tel x vérifie $x\mathcal{T}z$. Ainsi, pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{T}z$. On en déduit que $\mathcal{T}$ est de type 4.

4. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathcal{R}$ est du type 3
   (ii) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ \mathcal{R}^+(A \cap B) = \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$
   (iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A)) \subset A$
   (iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+(A))$.
   - (i) $\Longrightarrow$ (ii)
     Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 3. Soit A et B deux sous-ensembles de E. Il s'agit de montrer que $\mathcal{R}^+(A \cap B) = \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$.
     * D'après 1(c), $\mathcal{R}^+(A \cap B) \subset \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$.
     * Soit $y \in \mathcal{R}^+(A) \cap \mathcal{R}^+(B)$. Alors $y \in \mathcal{R}^+(A)$, donc il existe $a \in A$ tel que $a\mathcal{R}y$. De même $y \in \mathcal{R}^+(B)$, donc il existe $b \in B$ tel que $b\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 3, $a = b$, et donc $a \in A \cap B$. Par conséquent, $y \in \mathcal{R}^+(A \cap B)$.

     Les deux inclusions ci-dessus montrent l'égalité.

- (ii) $\Longrightarrow$ (iii)
  Supposons que (ii) est vérifié. Soit A un sous-ensemble de E. Soit $x \in \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A))$. Ainsi, il existe $y \in \mathcal{R}^+(A)$ tel que $x\mathcal{R}y$. Soit une tel y. D'après (ii),

  $$\mathcal{R}^+(\{x\} \cap A) = \mathcal{R}^+(\{x\}) \cap \mathcal{R}^+(A).$$

  Or y étant en relation avec x, on a $y \in \mathcal{R}^+(\{x\})$, et par définition de y, $y \in \mathcal{R}^+(A)$. Par conséquent,

  $$\mathcal{R}^+(\{x\}) \cap \mathcal{R}^+(A) \neq \varnothing \qquad \text{puis:} \qquad \mathcal{R}^+(\{x\} \cap A) \neq \varnothing \qquad \text{puis:} \qquad \{x\} \cap A \neq \varnothing.$$

  Cette dernière propriété signifie que $x \in A$. Ainsi, $\mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A)) \subset A$.
- (iii) $\Longrightarrow$ (iv)
  Supposons que (iii) est vérifié. Soit A un sous-ensemble de E, et supposons que $\mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \cap \mathcal{R}^+ A \neq \varnothing$. Soit y dans cette intersection. Alors il existe $x \in A$ tel que $x\mathcal{R}y$, et il existe $x' \in \complement_E A$, tel que $x'\mathcal{R}y$. Comme $A \cap \complement_E A = \varnothing$, $x \neq x'$. Soit $B = \{x\}$. Comme $x\mathcal{R}y$, on a $y \in \mathcal{R}^+(\{x\})$, et donc, comme $x'\mathcal{R}y$, $x' \in \mathcal{R}^-\mathcal{R}^+(\{x\})$. Or, d'après (iii), $\mathcal{R}^-\mathcal{R}^+(\{x\}) \subset \{x\}$, donc $x = x'$, d'où une contradiction. Ainsi,

  $$\mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \cap \mathcal{R}^+ A = \varnothing, \qquad \text{donc:} \qquad \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+ A).$$

- (iv) $\Longrightarrow$ (i)
  Supposons que (iv) est vérifié. Soit y un élément de F. Si y est en relation avec au moins un élément x de E, montrons que cet élément est unique. Soit x et x' deux éléments en relation avec y. Il s'agit de montrer que $x = x'$. En prenant $A = \{x\}$ dans (iv), $\mathcal{R}^+\left(\complement_E\{x\}\right) \subset \complement_F(\mathcal{R}^+\{x\})$. Or, si $x' \neq x$, $x' \in \complement_E\{x\}$, et donc $y \in \mathcal{R}^+\left(\complement_E\{x\}\right)$, puisque $x'\mathcal{R}y$. Ainsi, $y \in \complement_F(\mathcal{R}^+\{x\})$. Mais comme on a également $x\mathcal{R}y$, on a aussi $y \in \mathcal{R}^+\{x\}$, d'où une contradiction. Ainsi, $x = x'$. Cela montre que $\mathcal{R}$ est de type 3.

On remarque que $\mathcal{R}$ est de type 1 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 3. On en déduit donc que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est du type 1
(ii) $\forall (L, M) \in (\mathcal{P}(F))^2,\ \mathcal{R}^-(L \cap M) = \mathcal{R}^-(L) \cap \mathcal{R}^-(M)$
(iii) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L)) \subset L$
(iv) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ \mathcal{R}^-\left(\complement_F L\right) \subset \complement_E(\mathcal{R}^-(L))$.

5. Montrons que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est du type 4
(ii) $\mathcal{R}^+(E) = F$
(iii) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ L \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$
(iv) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \complement_F(\mathcal{R}^+(A)) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E(A)\right)$.

- (i) $\Longrightarrow$ (ii)
  Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 4. Par définition, $\mathcal{R}^+(E) \subset F$. Montrons qu'on a égalité. Pour cela, considérons un élément y de F, et montrons qu'il est dans $\mathcal{R}^+(E)$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 4, par définition, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Ainsi, $y \in \mathcal{R}^+(E)$.
- (ii) $\Longrightarrow$ (iii)
  Supposons (ii). Soit L un sous-ensemble de F. Soit $y \in L \subset F$. Comme $\mathcal{R}^+(E) = F$, $y \in \mathcal{R}^+(E)$, donc il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Comme $y \in L$, on a $x \in \mathcal{R}^-(L)$. Alors, la relation $(x\mathcal{R}y) \wedge (x \in \mathcal{R}^-(L))$ amène $y \in \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$. Ainsi, $L \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^-(L))$.
- (iii) $\Longrightarrow$ (iv)
  Supposons (iii). D'après (iii) avec $L = \complement_F(\mathcal{R}^+ A)$, on a : $\complement_F(\mathcal{R}^+ A) \subset \mathcal{R}^+\left(\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right)\right)$.
  Par ailleurs, on a $\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right) \subset \complement_E A$. En effet, soit $x \in \mathcal{R}^-\left(\complement_F \mathcal{R}^+ A\right)$. Alors, il existe $y \in \complement_F(\mathcal{R}^+ A)$ tel que $x\mathcal{R}y$. Comme $y \notin \mathcal{R}^+(A)$, il est nécessaire que $x \notin A$. Ainsi, $x \in \complement_E A$.
  L'inclusion $\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right) \subset \complement_E A$ amène, d'après la question 1(a) :

  $$\mathcal{R}^+\left(\mathcal{R}^-\left(\complement_F(\mathcal{R}^+ A)\right)\right) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right) \qquad \text{puis:} \qquad \complement_F(\mathcal{R}^+ A) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E A\right).$$

- (iv) $\Longrightarrow$ (i)
  Supposons (iv). Appliquons (iv) avec $A = \varnothing$. On obtient :
  $$\complement_F(\mathcal{R}^+(\varnothing)) \subset \mathcal{R}^+\left(\complement_E \varnothing\right) \qquad \text{soit:} \qquad F \subset \mathcal{R}^+(E).$$
  Ainsi, $\mathcal{R}^+(E) = F$. Soit $y \in F$, comme $y \in \mathcal{R}^+(E)$, il existe donc $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$. Cela montre que $\mathcal{R}$ est de type 4.

En remarquant que $\mathcal{R}$ est de type 2 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 4, on obtient une liste de propriétés équivalentes :

(i) $\mathcal{R}$ est du type 2
(ii) $\mathcal{R}^-(F) = E$
(iii) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset \mathcal{R}^-(\mathcal{R}^+(A))$
(iv) $\forall L \in \mathcal{P}(F),\ \complement_E(\mathcal{R}^-(L)) \subset \mathcal{R}^-\left(\complement_F(L)\right)$.

6. (a) On vérifie que $\leqslant$ est une relation reflexive, antisymétrique et transitive.
   - Soit $\mathcal{R} \in \widehat{E}$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ entraîne $x\mathcal{R}y$, donc $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{R}$. Ainsi, $\leqslant$ est reflexive.
   - Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations telles que $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{R}$. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{S}y$ et $x\mathcal{S}y \Longrightarrow x\mathcal{R}y$, donc $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x\mathcal{S}y$. Soit G et G' les graphes associés à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. L'équivalence précédente implique que $(x, y) \in G$ équivaut à $(x, y) \in G'$, ainsi, $G = G'$, donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$. Par conséquent, $\leqslant$ est antisymétrique.
   - Soit $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations telles que $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$, et $\mathcal{S} \leqslant \mathcal{T}$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{S}y$ et $x\mathcal{S}y \Longrightarrow x\mathcal{T}y$. Par transitivité de l'implication, on obtient, pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{T}y$. Ainsi, $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{T}$. Par conséquent, $\leqslant$ est transitive.

   La relation $\leqslant$ étant réflexive, antisymétrique et transitive, c'est une relation d'ordre sur $\widehat{E}$.

   (b)
   - Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 1. Tout d'abord, il s'agit de comprendre la notation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, que l'on n'a pas explicitement définie (et notamment le sens dans lequel se font les compositions). Afin que la notation de la composition coïncide avec la notation utilisée pour les applications, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ doit déisgner la composition de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{R}$. Ainsi, si $\mathcal{T}$ désigne la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, $x\mathcal{T}y$ si et seulement s'il existe z dans E tel que $x\mathcal{R}^{-1}z$ et $z\mathcal{R}y$, donc $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Comme $\mathcal{R}$ est de type 1, z est en relation avec un seul élément à sa droite, donc $x = y$. Or, soit $\mathcal{U}$ la relation associée à l'application Id_E (ainsi $x\mathcal{U}y$ si et seulement si $x = y$). On en déduit que si $x\mathcal{T}y$, alors $x\mathcal{U}y$. Ainsi, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leqslant \mathrm{Id}_E$.
   - Supposons que $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{U}$. Soit z un élément de E admettant au moins une image. Montrons qu'elle est unique. Soit x et y dans E tels que $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Alors $x\mathcal{R}^{-1}z$ et $z\mathcal{R}y$, donc $x\mathcal{T}y$, donc $x\mathcal{U}y$, puis $x = y$. Ainsi, z ne peut pas admettre deux images distinctes. On en déduit que $\mathcal{R}$ est de type 1.

   (c)
   - * Supposons que $\mathcal{R}$ est de type 2. Soit x et y tels que $x\mathcal{U}y$, donc $x = y$. Or, x est en relation avec au moins un élément z de F, car $\mathcal{R}$ est de type 2. Ainsi, $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}^{-1}x$, donc $z\mathcal{R}^{-1}y$. Ainsi, $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})y$. Donc $Id_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$.
     * Réciproquement, si $Id_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, alors, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{U}x$, donc $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})x$, donc il existe $z \in F$ tel que $x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}^{-1}x$. Ainsi, x est en relation avec au moins un élément z de F. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est de type 2.

     On en déduit que $\mathcal{R}$ est de type 2 si et seulement si $\mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$
   - $\mathcal{R}$ est de type 3 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 1 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \leqslant Id_E$.
   - $\mathcal{R}$ est de type 4 si et seulement si $\mathcal{R}^{-1}$ est de type 2 si et seulement si $\mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$.

   (d)
   - Si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}_E$, alors les quatre inégalités de la question précédente sont vérifiées, donc $\mathcal{R}$ est de types 1, 2, 3 et 4. Étant de types 1 et 2, il s'agit d'une application. Étant de types 3 et 4, cette application est à la fois injective et surjective. C'est donc une bijection.
   - Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est une application bijective, donc est de types 1 et 2 (car c'est une application), 3 et 4 (car elle est injective et surjective). Ainsi, les quatre inégalités de la question précédente sont vérifiées. En particulier :
     * $\mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \leqslant \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Id}_E = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ par antisymétrie ;
     * $\mathrm{Id}_E \leqslant \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \leqslant \mathrm{Id}_E$, donc $\mathrm{Id}_E = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ par antisymétrie ;

   Ainsi, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est une application bijective.