Devoir Maison n° 3 – Suites

Exercice 1 –

1. Soit (u_n) une suite convergeant vers $a > 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, on trouve l'existence de N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{a}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3a}{2}$. La première des deux inégalités donne le résultat escompté.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2x$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

3. (a) $]0,1[$ est un intervalle stable par f. En effet, $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, et f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc $f(]0, \frac{1}{2}]) \subset]0, \frac{1}{4}] \subset]0,1[$. De même, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $f(1) = 0$, et f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$, donc $f(([\frac{1}{2}, 1[) \subset]0, \frac{1}{4}] \subset]0,1[$. Par conséquent, $f(]0,1[) \subset]0,1[$.

   Ainsi, puisque $u_0 \in]0,1[$, on en déduit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout n, $u_n \in]0,1[$. Comme on est en début de copie, on rédige cette récurrence, même si elle est immédiate.

   Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in]0,1[$.

   Puisque $u_0 \in]0,1[$ par hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ est vérifié.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifié. Alors $u_n \in]0,1[$, et comme $]0,1[$ est stable par f, $u_{n+1} = f(u_n)$ est encore dans $]0,1[$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

   Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

   Ainsi, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   Remarquons que par hypothèse, $u_0 < 1 = \frac{1}{0+1}$. Montrons plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \frac{1}{n+1}$ (vous comprendrez plus loin pourquoi j'ai exclus 0 de la récurrence).

   Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $u_n < \frac{1}{n+1}$.

   D'après le tableau de variations de f, $u_1 \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{1+1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vérifié. Alors, puisque $n \geqslant 1$ (raison pour laquel on a traité le cas 0 à part),
   $$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2},$$
   et, puisque f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$,
   $$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2},$$
   d'où $\mathcal{Q}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(1)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(n)$ entraîne $\mathcal{Q}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$. Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après le théorème d'encadrement.

(b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nu_n$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = (n+1)u_n(1-u_n) - nu_n = u_n(1-(n+1)u_n).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_n < 1$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < v_n < \frac{n}{n+1} < 1.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 1 Elle converge vers un réel L. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$, le théorème de prolongement des inégalités amène : $0 \leqslant L \leqslant 1$. De plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et strictement positive, $L \neq 0$. Donc $L \in]0,1]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On exprime w_n en fonction de u_n :

$$w_n = n(v_{n+1}-v_n) = n(n+1)u_{n+1}-n^2u_n = n(n+1)(u_n-u_n^2)-n^2u_n = nu_n-n(n+1)u_n^2 = v_n-\frac{n+1}{n}v_n^2.$$

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L, $(v_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L^2. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Ainsi, $(w_n)_su$ converge, et sa limite est $L - L^2 = L(1-L)$, d'après les règles arithmétiques usuelles sur les limites.

4. Si $L \neq 1$, alors $L(1-L) > 0$, donc, d'après le préliminaire, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $w_n \geqslant \frac{1}{2}L(1-L)$, donc $v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{1}{2n}L(1-L)$. Alors,

$$\forall n \geqslant n_0,\ v_n - v_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) \geqslant \frac{1}{2}L(1-L)\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$, on en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Désolé, je ne m'étais pas rendu compte, en donnant l'exercice, qu'il y avait un argument de séries, pour lequel vous ne disposiez pas encore de tous les outils nécessaires.

5. On a montré dans la question (3b) que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergevers $L \in]0,1]$. Par conséquent, elle ne peut converger vers $+\infty$: la question précédente aboutit à une contradiction, donc l'hypothèse $L \neq 1$ est erronée. Par conséquent $L = 1$, c'est-à-dire que la limite de $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1. On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2 –

1. **Sens direct.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $\ell \in F$. Supposons que $\ell \notin F$, donc $\ell \in \complement_{\mathbb{R}}F$. Comme F est fermé, $\complement_{\mathbb{R}}F$ est ouvert. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell,\varepsilon) \subset \complement_{\mathbb{R}}F$. Pour ce choix de ε, on en déduit, par définition de la convergence, l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in B(\ell,\varepsilon)$, donc $u_n \in \complement_{\mathbb{R}}F$, donc $u_n \notin F$. Cela contredit le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans F. Par conséquent, l'hypothèse de la démonstration par l'absurde est fausse, donc $\ell \in F$.

2. **Réciproque.**

On montre la contraposée : si F n'est pas fermé, il existe une suite d'éléments de F convergeant vers un réel $\ell \notin F$. En effet, si F n'est pas fermé, alors $\complement_{\mathbb{R}}F$ n'est pas ouvert, donc, en niant la définition d'un ouvert, il existe $\ell \in \complement F$ (qu'on se fixe), tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\ell,\varepsilon)$ n'est pas contenu dans $\complement_{\mathbb{R}}F$, donc rencontre F : $B(\ell,\varepsilon) \cap F \neq \varnothing$. Ceci est vrai pour tout ε, notamment pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}*$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(\ell,\frac{1}{n}) \cap F$ est non vide. On peut donc choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in B(\ell,\frac{1}{n}) \cap F$. La suite (u_n) construite de la sorte est bien à termes dans F, et converge vers $\ell \notin F$, car pour tout n, $d(u_n,\ell) < \frac{1}{n}$.

Exercice 3 – *Dans tout l'exercice, tous les entiers considérés sont supérieurs ou égaux à 3.*
Soit f_n l'application définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Soit $n \geqslant 3$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1).$$

   Ainsi :
   - f_n' est négative sur $[0,1]$, strictement sur $]0,1[$. La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $[0,1]$. Comme f_n y est continue, d'après le théorème de la bijection et le théorème des valeurs intéremédiaires, f_n se restreint sur $[0,1]$ en une bijection sur son image $f_n([0,1])$, et cette image est un intervalle d'extremités $f(0) = 1$ et $f(1) = 2 - n < 0$. Ainsi, $0 \in]2-n, 1[$, donc 0 admet un unique antécédent dans $]0,1[$ par f_n. Cela montre l'existence (et l'unicité) de α_n.
   - f_n' est positive sur $[1,+\infty[$, strictement sur $]1,+\infty[$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Comme f_n y est continue, d'après le théorème de la bijection et le théorème des valeurs intéremédiaires, f_n se restreint sur $[1,+\infty[$ en une bijection sur son image $f_n([1,+\infty[)$, et cette image est un intervalle d'extremités $f(1) = 2 - n < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Or, $0 \in]2-n,+\infty[$, donc 0 admet un unique antécédent dans $]1,+\infty[$ par f_n. Cela montre l'existence (et l'unicité) de β_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, f_n est positive sur $[0,\alpha_n]$ et négative sur $[\alpha_n, 1]$.
   Étudions le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$. Par définition de α_{n+1},

$$0 = \alpha_{n+1}^{n+1} - (n+1)\alpha_{n+1} + 1 = \alpha_{n+1}\cdot\alpha_{n+1}^n - n\alpha_{n+1} + 1 - \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}^n - n\alpha_{n+1} + 1 = f_n(\alpha_n),$$

   l'inégalité découlant du fait que $\alpha_{n+1} \leqslant 1$ et $\alpha_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $f_n(\alpha_{n+1}) \geqslant 0$. On en déduit que $\alpha_{n+1} \in [0,\alpha_n]$. Ainsi, $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.
   Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante. Elle est minorée par 0. Elle converge donc.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant \alpha_0 < 1$; ainsi, $0 \leqslant \alpha_n^n \leqslant \alpha_0^n$, et comme $0 < \alpha_0 < 1$, (α_0^n) tend vers 0. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (α_n^n) tend vers 0.
   Soit ℓ la limite de $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$. Si $\ell \neq 0$, alors $\ell > 0$, et $(n\alpha_n)$ tend vers $+\infty$. Alors, en passant à la limite dans l'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n^n - n\alpha_n + 1 = 0,$$

   le terme de gauche tend vers $-\infty$, alors que le terme de droite est égal à 0, donc tend vers 0. On en déduit une contradiction. Ainsi, $\ell = 0$.

3. De plus, le raisonnement précédent montre que $(-n\alpha_n + 1)$ tend vers 0, donc que $(n\alpha_n)$ tend vers 1. Par définition des équivalents, on en déduit que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4. (a) Soit $n \geqslant 3$. Alors :

$$\begin{aligned}
f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n - n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{n^{k/2}} - n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + 1 \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \frac{2^k}{n^{k/2}} - n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + 1 \\
&= 1 + \frac{2n}{\sqrt{n}} + \frac{4n(n-1)}{2n} - n - 2\sqrt{n} + 1 \\
&= 1 + 2(n-1) - n + 1 = n.
\end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.

(b) Encore une fois d'après le théorème de la bijection, pour tout $n \geqslant 3$, $\beta_n \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$. On en déduit l'encadrement suivant de β_n :

$$\forall n \geqslant 3,\ 1 < \beta_n \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

D'après le théorème d'encadrement, $(\beta_n)_{n \geqslant 3}$ converge vers $\ell = 1$.

(c) Pour tout $n \geqslant 3$, on a : $\beta_n^n = n\beta_n - 1$, soit, en passant au logarithme : $n \ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$. Or,

$$\ln(n\beta_n - 1) = \ln n + \ln(\beta_n - \frac{1}{n}).$$

Comme $\beta_n - \frac{1}{n}$ tend vers 1, $\ln(\beta_n - \frac{1}{n})$ tend vers 0, et comme $\ln n$ tend vers $+\infty$; on en déduit que $\ln(\beta_n - \frac{1}{n}) = o(\ln n)$. Ainsi, on obtient un équivalent de $n \ln(\beta_n)$:

$$n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n, \qquad \text{soit :} \qquad \ln(\beta_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Alors,

$$\beta_n - 1 = \mathrm{e}^{\ln(\beta_n) - 1} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\beta_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

On a utilisé l'équivalent $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim_{+\infty} u_n$ si (u_n) tend vers 0, ce qui est possible ici, du fait que $\ln(\beta_n)$ tend vers 0, puisqu'elle est équivalente à $\frac{\ln n}{n}$, de limite nulle. Ainsi :

$$\beta_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

PROBLÈME

PARTIE I – Étude d'une suite définie par une récurrence linéaire.

1. Soit P le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.
   - $P(-2) = -7$, et $P(-1) = 1$, et P est continue sur $[-2, -1]$, donc P admet une racine x_1 dans $]-2, -1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (pour l'instant, je ne sais pas si elle est unique ; on peut obtenir l'unicité en faisant une étude plus précise des variations de P, et en utilisant le théorème de la bijection, mais c'est inutile, comme vous allez le constater)
   - $P(0) = 1$ et $P(1) = -1$, et P est continue sur $[0, 1]$, donc P admet une racine x_2 dans $]0, 1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
   - $P(1) = -1$ et $P(2) = 1$, et P est continue sur $[1, 2]$, donc P admet une racine x_3 dans $]1, 2[$, d'après le tvi.

   Ainsi, on a trouvé trois racines distinctes. Comme P est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines distinctes (si vous n'en êtes pas convaicus, étudiez les variations de P). Ainsi, x_1, x_2 et x_3 sont les seules racines de P. D'où l'existence et l'unicité de racines de trois P, x_1, x_2 et x_3 vérifiant $-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$.

2. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

   Par identification des coefficients du polynôme, on obtient $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

   Vu les intervalles contenant les racines x_1, x_2 et x_3, on a bien $|x_2| < |x_1|$. De plus $x_3 = 1 - x_1 - x_2 > -x_1$ car $x_2 < 1$, et comme $x_1 < 0$ et $x_3 > 0$, cela implique $|x_3| > |x_1|$.

3. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$.

   D'après les conditions initiales, $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Alors Alors, en particulier, puisque $a_0 = 0$, on a $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. De plus, d'après la relation de récurrence vérifiée par (a_n),

$$a_{n+1} - a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}).$$

Or, $a_{n-1} \geqslant 0$ d'après ce qui précède, et $a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant 0$ d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$. Ainsi, $a_{n+1} \geqslant a_n$, puis $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(2)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Ainsi, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et strictement positive à partir du rang 2, puisque $a_2 = 1$.

4. Les suites $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence (vérification immédiate), donc aussi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$, pour un certain choix de réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ainsi, si on trouve des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit égale aux rangs 0, 1 et 2 à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on aura deux suites définies par la même relation de récurrence et les mêmes conditions initiales : elles seront donc égales. Il suffit donc de trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 & = & 1. \end{cases}$$

Alors $\lambda_3 = -(\lambda_2 - \lambda_1)$, d'où, en remplaçant dans les deux dernières équations,

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1 - x_3) + \lambda_2(x_2 - x_3) & = & 0 \\ \lambda_1(x_1^2 - x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 - x_3^2) & = & 1. \end{cases}$$

De plus $x_2^2 - x_3^2 = (x_2 - x_3)(x_2 + x_3)$, d'où, en multipliant la première équation par $(x_2 + x_3)$ et en retranchant la seconde, on trouve :

$$\lambda_1((x_1 - x_3)(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)(x_1 + x_3)) = 1$$

et par conséquent,

$$\lambda_1 = \frac{-1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

De même, on trouve

$$\lambda_2 = \frac{-1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{-1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Pour ce choix des réels λ_1, λ_2 et λ_3, on a donc $v_0 = a_0$, $v_1 = a_1$ et $v_2 = a_2$. De plus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivent la même récurrence d'ordre 3, donc l'égalité des trois premiers termes amène l'égalité des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

5. Puisque $|x_3| > |x_2|$, $x_2^n = o(x_3^n)$ (faire le quotient des deux !). De même, $x_1^n = o(x_3^n)$. Par conséquent,

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n \underset{+\infty}{\sim} \lambda_3 x_3^n.$$

Remarquez que je ne mets pas de quantificateur, puisque n est une variable muette dans l'équivalent.

6. De l'équivalent de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit l'équivalent suivant de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_3 x_3^n} = x_3.$$

Ainsi, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x_3.

PARTIE II – Étude et amélioration de la vitesse de convergence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculons $b_n - x_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = b_n - x_3 = \frac{\lambda_1 x_1^{n+1} + \lambda_2 x_2^{n+1} + \lambda_3 x_3^{n+1}}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} - x_3$$
$$= \frac{\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n (x_2 - x_3)}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n}$$

Or, puisque $|x_1| > |x_2|$, le numérateur est équivalent à $\lambda_1 x_1^n (x_1 - x_3)$, et le dénominateur, égal à u_n est équivalent à $\lambda_3 x_3^n$. En faisant le quotient de ces deux équivalents, on obtient bien

$$\varepsilon_n \underset{+\infty}{\sim} (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n.$$

2. C'est quasiment la définition des O. Plus précisément, puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n}{(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n} = 1,$$

il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, $\dfrac{\varepsilon_n}{(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n} \leqslant 2.$

On en déduit que pour $n \geqslant N$, $|b_n - x_3| \leqslant 2\left|(x_1 - x_3)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|\left(\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|\right)^n.$

Cela correspond bien à la définition des O, avec $M = 2\left|(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right|$.

3. Soit $\beta > 0$, et soit $E(\beta)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(\beta^n)$.

   (a) Si $\beta < 1$, alors $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Or si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$, il existe M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M\beta^n.$$

   La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par une suite convergeant vers 0. D'après le théorème d'encadrement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (b) Soit q tel que $|q| < \beta$. Alors une suite géométrique de raison q s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{\beta^n} = u_0 \frac{q^n}{\beta^n} = u_0\left(\frac{q}{\beta}\right)^n.$$

   Comme $\left|\dfrac{q}{\beta}\right| < 1$, cette suite tend vers 0. Donc $u_n = o(\beta^n)$ et donc $u_n = O(\beta^n)$.

   (c) Soit $\ell \neq 0$ la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En appliquant la définition de la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ avec $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \frac{|\ell|}{2} < |v_n| < \frac{3|\ell|}{2}.$$

   De plus, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M\beta^n.$$

   Donnons-nous un tel N et un tel M. Alors :

   - $\forall n \geqslant N, \quad \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{2M}{\ell}\beta^n$, donc $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$;
   - $\forall n \geqslant N$, $|u_n v_n| < \dfrac{3|\ell|M}{2}\beta^n$, et par conséquent $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(\beta)$.

4. Puisque $|x_2| < |x_1| < |x_3|$, on a : $\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right| < 1$, $\left|\dfrac{x_2}{x_3}\right| < 1$, et $\left|\dfrac{x_1}{x_3}\right| < 1$, et par conséquent :

$$\left|\frac{x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|, \qquad \left|\frac{x_2x_1}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{x_1^2}{x_3^2}\right| = \left|\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_1}{x_3}\right| < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|.$$

Ainsi, $\beta < \left|\dfrac{x_1}{x_3}\right|$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n &= \frac{\lambda_1 x_1^n(x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3)}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n \\
&= \frac{\lambda_1 x_1^n(x_1 - x_3) + \lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1x_2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\lambda_1 x_1^n}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n} \\
&= \frac{\lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1x_2}{x_3}\right)^n}{\lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n},
\end{aligned}$$

donc, d'après l'équivalent de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvé dans la question I-5,

$$\begin{aligned}
b_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_2 x_2^n(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1^2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_1x_2}{x_3}\right)^n}{\lambda_3 x_3^n} \\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(x_2 - x_3)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2}\left(\frac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3^2}\left(\frac{x_1x_2}{x_3^2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Par définition de β, $\left(\dfrac{x_2}{x_3}\right)^n = O(\beta^n)$, $\left(\dfrac{x_1^2}{x_3^2}\right)^n = O(\beta^n)$ et $\left(\dfrac{x_1x_2}{x_3^2}\right)^n = O(\beta^n)$. Par conséquent, en multipliant ces expressions en $O(\beta^n)$ par des constantes, et en les additionnant, on trouve :

$$b_n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = O(\beta^n).$$

5. D'après la question précédente,

$$b_n = x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n) \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^{n+1}).$$

Or, $\beta^{n+1} = \beta\cdot\beta^n$, donc $O(\beta^{n+1}) = O(\beta^n)$ (simplification par une constante non nulle dans un O). Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 3, \quad c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}, \qquad \text{donc:}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)}{x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n - x_3 - (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} \\
&= \frac{\left(\frac{x_1}{x_3} - 1\right)(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)}{\left(\frac{x_1}{x_3} - 1\right)(x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} + O(\beta^n)} \\
&= \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$c_n - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} - \frac{x_1}{x_3} = \frac{\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) - \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_3}O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} = \frac{O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}.$$

Or, d'après la question 4, $\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n$ est une suite géométrique dont la raison est de valeur absolue strictement inférieure à 1, donc elle converge vers 0. Par conséquent, $1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)$ est de limite égale à 1. En appliquant la question (3c) avec $\beta' = \frac{\beta x_3}{x_1}$, on en déduit que

$$\frac{O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)} = O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right).$$

Ainsi,

$$c_n - \frac{x_1}{x_3} = O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right), \qquad \text{soit:} \qquad c_n = \frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right).$$

6. En remplaçant b_{n+1}, b_n, et c_n par les expressions en O obtenues dans les questions 4 et 5, on obtient :

$$\begin{aligned}
&b_{n+1} - c_n b_n - (1 - c_n)x_3 \\
&= x_3 + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n+1} + O(\beta^n) - \left((x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + O(\beta^n)\right)\left(\frac{x_1}{x_3} + O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right)\right) - x_3 \\
&= O(\beta^n) + (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) + O(\beta^n) O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right) = O(\beta^n),$$

et que

$$O(\beta^n) O\left(\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O\left(\left(\beta \cdot \frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right) = O(\beta^n),$$

car $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$. Ainsi, $b_{n+1} - c_n b_n - (1 - c_n)x_3 = O(\beta^n)$, et ainsi, en divisant par $1 - c_n$ de limite $1 - \frac{x_1}{x_3} \neq 0$, on obtient, d'après la question (3c), $d_n - x_3 = O(\beta^n)$.

On peut dire qu'on a accéléré la convergence puisqu'on a construit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_3, plus vite que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisque $\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|$.