

Correction du Devoir Maison n° 6

Exercice 1 –

1. $P(-i) = (1 + 1)^n = 2^n$, donc $-i$ n'est pas racine de P . Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} z \text{ est racine de } P &\iff (1 + iz)^n - (\cos(2n\alpha) + i\sin(2n\alpha))(1 - iz)^n = 0 \\ &\iff (1 + iz)^n = e^{i2n\alpha}(1 - iz)^n \\ &\iff \left(e^{-2i\alpha} \cdot \frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^n = 1 \quad \text{puisque } z \neq -i \end{aligned}$$

Ainsi, z est une racine de P si et seulement si $e^{-2i\alpha} \cdot \frac{1 + iz}{1 - iz}$ est une racine n -ième de l'unité, donc s'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que :

$$\begin{aligned} e^{-2i\alpha} \cdot \frac{1 + iz}{1 - iz} &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{i.e.} \quad 1 + iz = e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)}(1 - iz), \quad z \neq -i \\ \text{i.e.} \quad iz \left(e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} + 1 \right) &= e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} - 1, \quad z \neq -i \end{aligned}$$

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} + 1 &= 0 \iff e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} = -1 \\ &\iff 2 \left(\frac{k\pi}{n} + \alpha \right) \equiv \pi \pmod{2\pi} \\ &\iff 2\alpha n \equiv (n - 2k)\pi \pmod{2n\pi} \\ &\implies 2\alpha n \equiv (n - 2k)\pi \pmod{2\pi} \\ &\iff 2\alpha n \equiv n\pi \pmod{2\pi} \\ &\iff e^{2i\alpha n} = e^{in\pi} = (-1)^n \end{aligned}$$

Attention au fait que la quatrième ligne est une implication et non une équivalence. Cela dit, comme par hypothèse $e^{in\pi} \neq (-1)^n$, en contraposant l'implication globale ci-dessus, on obtient que $e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} + 1 \neq 0$. On peut donc diviser par cette quantité, et on trouve donc que z est racine de P si et seulement si

$$\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} - 1}{e^{2i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} + 1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} - e^{-i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)}}{e^{i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)} + e^{-i(\frac{k\pi}{n} + \alpha)}} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)} = \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right)$$

(la valeur obtenue étant réelle, elle est différente de $-i$). La tangente étant injective sur tout intervalle de longueur π privé des points où elle n'est pas définie, les valeurs ci-dessus sont deux à deux distinctes. Ainsi, on a trouvé n racines deux à deux distinctes de P . Comme P est de degré au plus n , et est non nul (puisque $P(-i) \neq 0$), P admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Ainsi, les racines obtenues ne peuvent pas être multiples. Par conséquent :

Ainsi, l'ensemble des racines de P est $\left\{ \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right), \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. Ces racines sont simples.

2. Le coefficient dominant de P est $i^n - (-i)^n e^{2in\alpha}$. On obtient donc la factorisation suivante :

$$P = i^n (1 - (-1)^n e^{2in\alpha}) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) \right)$$

Le produit $\prod_{k=1}^n \tan\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$ est bien défini si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\alpha + \frac{k\pi}{n} \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{i.e.} \quad 2n\alpha \not\equiv n\pi - 2k\pi \pmod{2n\pi}.$$

En faisant varier k de 1 à n , on obtient toutes les classes de congruence de multiples de π de même parité que n modulo $2n\pi$, donc finalement, le produit est bien défini si et seulement si $2n\alpha \not\equiv n\pi \pmod{2\pi}$ donc si et seulement si $e^{2in\alpha} \neq (-1)^n$.

Sous cette condition, on peut utiliser la factorisation de P trouvée plus haut. Évaluons alors P en 0. On obtient :

$$1 - e^{i2n\alpha} = P(0) = i^n (1 - (-1)^n e^{2in\alpha}) \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) \right) = (-i)^n (1 - (-1)^n e^{2in\alpha}) \prod_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right),$$

la modification des indices résultant du fait que $\tan$ est π -périodique. Par conséquent :

- Si n est pair, $\prod_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) = \frac{1}{i} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{2}}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$.
- Si n est impair,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) &= \frac{-1}{i} \cdot \frac{1 - e^{i2n\alpha}}{1 + e^{i2n\alpha}} \\ &= -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{-in\alpha} - e^{in\alpha}}{e^{-in\alpha} + e^{in\alpha}} \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\sin(n\alpha)}{\cos(n\alpha)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan(n\alpha). \end{aligned}$$

On résume : $\prod_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan(n\alpha) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

Exercice 2 –

1. Soit h la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe $\frac{Q(x)}{x^n}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = 1 - \frac{|a_1|}{x} - \dots - \frac{|a_{n-1}|}{x^{n-1}} - \frac{|a_n|}{x^n} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|}{x^i}.$$

Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{i \cdot |a_i|}{x^{i+1}}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) \geq 0$. Comme $|a_n| \neq 0$, on obtient même, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) > 0$. On en déduit que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ (il n'y a pas d'indétermination ici!).

Ainsi, h étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, h est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $] -\infty, 1[$. Comme 0 est dans cet intervalle image, il admet un et un seul antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, h admet un unique zéro dans $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte que Q admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus, $Q(0) = -|a_n| \neq 0$, 0 n'est pas racine de Q , et de fait, $\boxed{Q \text{ admet une unique racine dans } \mathbb{R}_+^*}$.

2. (a) Soit s une racine de Q . Alors :

$$Q(s) = 0 \quad \text{donc:} \quad s^n = \sum_{i=1}^n |a_i| s^{n-i} \quad \text{donc:} \quad |s|^n = \left| \sum_{i=1}^n |a_i| s^{n-i} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |s|^{n-i},$$

d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi,

$$|s|^n - \sum_{i=1}^n |a_i| |s|^i \leq 0 \quad \text{soit:} \quad Q(|s|) \leq 0.$$

En reprenant l'application h ci-dessus, on obtient alors, puisque $s \neq 0$ (et donc $|s| \in \mathbb{R}_+^*$) :

$\boxed{h(|s|) \leq 0 = h(r)}$. Comme h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{|s| \leq r}$.

(b) On a :

$$\begin{cases} 0 = h(r) & \text{soit:} \quad 1 = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{r^k} \\ 0 = h(s) = h(re^{i\theta}) & \text{soit:} \quad 1 = \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{r^k e^{ik\theta}} \end{cases}$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{r^k} (1 - e^{-ik\theta}) = 0,$$

d'où, en multipliant par r^n :

$$\sum_{k=1}^n |a_k| r^{n-k} (1 - e^{-ik\theta}) = 0.$$

Identifions maintenant les parties réelles. On obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^n |a_k| r^{n-k} (1 - \cos(k\theta)) = 0}$.

(c) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1 - \cos(k\theta) \geq 0$. Ainsi, la somme obtenue dans la question précédente est une somme à termes positifs. On en déduit qu'elle est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_k| r^{n-k} (1 - \cos(k\theta)) = 0.$$

En particulier, pour $k = 1$ on obtient $|a_1| r^{n-1} (1 - \cos \theta) = 0$. Comme $a_1 \neq 0$ par hypothèse, et que $r \neq 0$, on en déduit que $\cos \theta = 1$, puis que $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Ainsi, $\boxed{s = re^{i\theta} = r}$.

Par conséquent, on a montré en (a) que toutes les racines de Q sont de module inférieur ou égal à r , et que si une racine est de module égal à r , cette racine est r (donc que r est la seule racine de module égal à r).

$\boxed{\text{Ainsi, toutes les racines de } Q \text{ différentes de } r \text{ sont de module strictement inférieur à } r.}$

3. Soit $M_1 = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (1 + |a_k|)$.

(a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M_1 \geq 1 + |a_k|$, d'où $|a_k| \leq M_1 - 1$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} Q(M_1) &= M_1^n - \sum_{k=1}^n |a_k| M_1^{n-k} \\ &\geq M_1^n - \sum_{k=1}^n (M_1 - 1) M_1^{n-k} \\ &= M_1^n - \sum_{k=1}^n (M_1^{n-k+1} - M_1^{n-k}) \\ &= M_1^n - \sum_{k=0}^{n-1} M_1^{n-k} + \sum_{k=1}^n M_1^{n-k} = M_1^n - M_1^n + M_1^0 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{Q(M_1) \geq 1}$.

(b) Par conséquent, $h(M_1) > 0 = h(r)$, et h étant strictement croissante, on obtient $\boxed{r < M_1}$.

4. Soit $M_2 = \left(1 + \sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(a) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n |a_k| M_2^{n-k} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n M_2^{2(n-k)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or, par définition de M_2 , on a :

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = M_2^2 - 1,$$

d'où, en remplaçant dans l'expression précédente :

$$\sum_{k=1}^n |a_k| M_2^{n-k} \leq (M_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (M_2^2)^k = (M_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{M_2^{2n} - 1}{M_2^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{M_2^{2n} - 1} < \sqrt{M_2^{2n}} = M_2^n.$$

La dernière majoration étant stricte, on en déduit que :

$$M_2^n - \sum_{k=1}^n |a_k| M_2^{n-k} > 0, \quad \text{soit:} \quad Q(M_2) > 0.$$

(b) Ainsi, $h(M_2) > 0 = h(r)$, et h étant strictement croissante, $r < M_2$.

5. Soit z une racine de P . Alors :

$$z^n = \sum_{k=1}^n (-a_k z^{n-k}) \quad \text{donc:} \quad |z|^n = \left| \sum_{k=1}^n (-a_k z^{n-k}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k z^{n-k}| = \sum_{k=1}^n |a_k| |z|^{n-k},$$

d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi :

$$Q(|z|) = |z|^n - \sum_{k=1}^n |a_k| |z|^{n-k} \leq 0.$$

On en déduit que $h(|z|) \leq 0 = h(r)$, et h étant croissante, $|z| \leq r$.

6. (a) P est un polynôme de degré n . Il admet donc n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

(b) P étant unitaire, on a :

$$P = (X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n).$$

Développons cette expression. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Les termes en X^k du développement sont obtenus de toutes les façons de sortir k termes X de k des parenthèses, et $n - k$ autres termes z_i des autres. Un tel terme est déterminé par le choix des $n - k$ parenthèses desquelles on tire les z_i , donc d'un sous-ensemble à $n - k$ éléments de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^n \left(X^k \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_{n-k}} \right).$$

En identifiant les coefficients, on obtient donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad a_{n-k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_{n-k}},$$

soit, en effectuant un changement de variables :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_k}.$$

Majorons le module de cette expression en utilisant l'inégalité triangulaire, et en remarquant que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z_i| \leq r_1$, par définition de r_1 :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_k| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |z_{i_1}| \cdots |z_{i_k}| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} r_1^k.$$

Cette somme est constituée de termes constants, le nombre de termes dans la somme étant le nombre de sous-ensembles à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (ou le nombre de façon de choisir k indices parmi n). Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_k| \leq \binom{n}{k} r_1^k.}$$

(c) Puisque r est une racine de Q , on a :

$$r^n = \sum_{k=1}^n |a_k| r^{n-k} \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} r_1^k r^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_1^k r^{n-k} - r^n,$$

d'où $\boxed{r^n \leq (r_1 + r)^n - r^n}$, d'après la formule du binôme. Résolvons cette inéquation en la variable r_1 . Puisque la racine n -ième est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$r_1 + r \geq \sqrt[n]{2r^n} = \sqrt[n]{2} \cdot r, \quad \text{donc: } \boxed{r_1 \geq (\sqrt[n]{2} - 1)r.}$$

(d) La première inégalité provient de la question précédente. De plus, d'après la question 5, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z_i| \leq r$, donc $r_1 = \max(|z_1|, \dots, |z_n|) \leq r$. Ainsi :

$$\boxed{(\sqrt[n]{2} - 1)r \leq r_1 \leq r.}$$

7. • Soit $P_1 = (X + 1)^n = X^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^k$. Alors

$$Q_1 = X^n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^k = 2X^n - (X + 1)^n.$$

La seule racine de P_1 est -1 , de multiplicité n . Ainsi, $\boxed{r_1 = 1}$. De plus, soit r la seule racine positive de Q_1 . Alors $r > 0$, et :

$$2r^n = (r + 1)^n \quad \text{soit: } \left(\frac{r + 1}{r} \right)^n = 2.$$

Ainsi, le réel positif $\frac{r + 1}{r}$ est la seule racine n -ième de 2 qui soit réelle positive, à savoir $\sqrt[n]{2}$. Par conséquent,

$$\frac{r + 1}{r} = \sqrt[n]{2} \quad \text{soit: } \boxed{r(\sqrt[n]{2} - 1) = 1 = r_1.}$$

Ainsi, on peut avoir égalité dans la première inégalité.

- Soit $P_2 = 2X^n - (X + 1)^n = Q_1$. Alors $Q_2 = P_2$. Ainsi, r est, d'après la question 2, la racine de Q_2 (donc de P_2) de plus grand module. Ainsi, $\boxed{r = r_1}$, par définition de r_1 . On peut donc avoir égalité dans la deuxième inégalité.

Remarquez que je n'ai pas eu besoin de la valeur de r et r_1 dans ce raisonnement. Cette valeur est donnée par le cas précédent :

$$r = r_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}.$$

De plus, le même raisonnement montre que l'égalité est obtenue pour tout polynôme P unitaire dont tous les coefficients autres que le coefficient dominant sont des réels négatifs, puisque dans ce cas, $P = Q$.