

Devoir Maison n° 7

Exercice 1 –

1. Soit F un sous-espace de E . Il est donc non vide, et stable par combinaisons linéaires à coefficients complexes; il est donc *a fortiori* stable également par combinaisons linéaires à coefficients réels, et est donc un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de E .

La réciproque n'est pas vraie; un sous-ensemble stable par combinaisons linéaires à coefficients réels n'a pas de raison en général d'être stable par combinaisons linéaires à coefficients complexes. Donnons un contre-exemple. Soit $E = \mathbb{C}$. Alors $F = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ est un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$, mais n'est pas un sous-espace de $\mathbb{C}$, car F n'est pas stable par combinaisons linéaires à coefficients complexes; par exemple, $i \cdot 1 \notin \mathbb{R}$.

2. (a) Pour commencer, pour tout $y \in iF$, il existe $x \in F$ tel que $y = ix$, et comme $x \in E$ et que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $ix \in E$. Ainsi, iF est un sous-ensemble de E .

Soit $(x, y) \in (iF)^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe x' et y' dans F tels que $x = ix'$ et $y = iy'$. Ainsi :

$$\lambda x + y = i(\lambda x' + y').$$

Comme F est un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de E , il est stable par combinaisons linéaires à coefficients réels; par conséquent, $\lambda x' + y' \in F$, puis $\lambda x + y \in iF$. Ainsi, iF est stable par combinaisons linéaires à coefficients réels.

De plus, puisque F est un sous-espace (sur $\mathbb{R}$) de E , F est non vide. Soit $x \in F$. Alors ix est un élément de iF . Ainsi, iF est non vide.

iF étant un sous-ensemble non vide de E , et étant stable par combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de E .

- (b) Soit $x \in F$. Alors $x = i(i(-x))$, et comme $-x \in F$, $x \in i(iF)$. Donc $F \subset i(iF)$. Réciproquement, soit $x \in i(iF)$. Alors, il existe $x' \in iF$ tel que $x = ix'$, puis il existe $x'' \in F$ tel que $x' = ix''$. Alors $x = -x''$, et donc $x \in F$. Par conséquent, $i(iF) \subset F$, puis $i(iF) = F$.
- (c) Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de F . Alors $(ib_1, \dots, ib_n)$ est une base de iF . En effet, l'application $\varphi : F \rightarrow iF$ définie par $\varphi(x) = ix$ est linéaire, et c'est un isomorphisme, sa réciproque étant l'application $\psi : iF \rightarrow F$ définie par $\psi(y) = -iy$. Par conséquent, φ envoie une base de F sur une base de iF .

On en déduit que $\dim(F) = \dim(iF)$.

- (d) Pour commencer, $F \cap iF \subset F$, et $F \cap iF$ est un sous-espace de E . En effet, montrons la stabilité par combinaison linéaire à coefficients complexes. Soit $x, y \in F \cap iF$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Écrivons $\lambda = a + ib$, où a et b sont des réels. Alors :

$$\lambda x + y = (ax + y) + b \cdot ix.$$

- Or, x et y sont dans F , et F est stable par combinaison linéaire sur $\mathbb{R}$. Donc $ax + y \in F$. De plus, x est élément de iF , donc ix est élément de F , et, par stabilité de F sur $\mathbb{R}$, $b \cdot ix$ aussi. En sommant ces deux éléments de F , $\lambda x + y \in F$.
- De la même manière, x et y sont dans iF , et comme $a \in \mathbb{R}$, et F est stable par combinaisons linéaires réelles, on en déduit que $ax + y \in iF$. De plus, $x \in F$, donc $bix \in iF$. Ainsi, iF étant stable pour la somme, Donc $\lambda x + y \in iF$.

Par conséquent, $\lambda x + y \in F \cap iF$, donc $F \cap iF$ est stable par combinaisons linéaires à coefficients complexes. De plus, $0 \in F$ et $0 \in iF$, donc $0 \in F \cap iF$. Donc $F \cap iF$ est non vide. Comme il s'agit d'un sous-ensemble de F , donc de E , on en déduit que $F \cap iF$ est un sous-espace (sur $\mathbb{C}$) de E .

Montrons que c'est le plus grand sous-espace de E contenu dans F . Soit G un sous-espace de E contenu dans F , et soit $x \in G$. Alors $x \in F$ car $G \subset F$. Par ailleurs, $ix \in G$, car G est un sous-espace (sur $\mathbb{C}$) de E . Comme $G \subset F$, on en déduit que $ix \in F$, donc que $x \in iF$. Ainsi, $x \in F \cap iF$. Par conséquent, $G \subset F \cap iF$. Conclusion : $F \cap iF$ est un sous-espace de E contenu dans F , et tout autre sous-espace G de E contenu dans F vérifie $G \subset F \cap iF$. Il en résulte que $F \cap iF$ est le plus grand sous-espace de E contenu dans F .

- (e) Soit G un supplémentaire de $F \cap iF$ dans F . Soit $x \in G \cap iG$. Comme $G \subset F$ et $iG \subset iF$, on a $G \cap iG \subset F \cap iF$, et par conséquent, $x \in F \cap iF$. Ainsi,

$$x \in G \cap (F \cap iF).$$

Comme G est un supplémentaire dans F de $F \cap iF$, il en résulte que $x = 0$. Ainsi, $G \cap iG = \{0\}$, ce qui signifie que G est un sous-espace réel de E .

3. Soit F un sous-espace réel de E .

- (a) Soit $(x_j)_{j \in I}$ une famille d'éléments de F libres sur $\mathbb{R}$. Soit $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{C}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$ presque tous nuls, tels que

$$\sum_{j \in I} \lambda_j x_j = 0.$$

Écrivons pour tout $j \in I$, $\lambda_j = a_j + ib_j$, où a_j et b_j sont des réels. Alors les a_j et les b_j sont presque tous nuls, et $\sum_{j \in I} a_j x_j = -\sum_{j \in I} b_j (ix_j)$. La première somme est dans F , la seconde est dans iF . Ainsi, au vu de l'égalité, elles sont toutes les deux dans $F \cap iF$ qui est égal à $\{0\}$ (F est un sous-espace réel). Ainsi :

$$\sum_{j \in I} a_j x_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in I} b_j (ix_j) = 0.$$

Comme la famille $(x_j)_{j \in I}$ est libre (sur $\mathbb{R}$), la première somme (qui est à coefficients réels) amène : $\forall j \in I, a_j = 0$.

De plus, en multipliant la seconde somme par $-i$, on obtient $\sum_{j \in I} b_j x_j = 0$. En utilisant de nouveau la liberté de la famille $(x_j)_{j \in I}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $j \in I$, $b_j = 0$.

Ainsi, pour tout $j \in I$, $\lambda_j = 0$, et la famille $(x_j)_{j \in I}$ est libre sur $\mathbb{C}$.

- (b) Montrons que si $\dim_{\mathbb{C}} E = n$, alors $\dim_{\mathbb{R}} E = 2n$. Soit $(b_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de E sur $\mathbb{C}$, alors :
- $(b_1, \dots, b_n, ib_1, \dots, ib_n)$ est une famille libre de E sur $\mathbb{R}$: Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ une famille de réels tels que :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^n \mu_j ib_j = 0 \quad \text{soit:} \quad \sum_{j=1}^n (\lambda_j + i\mu_j) b_j = 0.$$

Comme la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre sur $\mathbb{C}$, on en déduit que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_j + i\mu_j = 0$, donc que $\lambda_j = 0$ et $\mu_j = 0$. Ainsi, la famille $(b_1, \dots, b_n, ib_1, \dots, ib_n)$ est une famille libre de E sur $\mathbb{R}$.

- $(b_1, \dots, b_n, ib_1, \dots, ib_n)$ est une famille génératrice de E sur $\mathbb{R}$: en effet, soit $x \in E$. Comme $(b_1, \dots, b_n)$ est génératrice sur $\mathbb{C}$ de E , il existe des complexes $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$x = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Soit, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_j = \lambda_j + i\mu_j$, où λ_j et μ_j sont réels. Alors :

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^n \mu_j (ib_j).$$

Ainsi, $(b_1, \dots, b_n, ib_1, \dots, ib_n)$ est une famille génératrice de E sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, $(b_1, \dots, b_n, i b_1, \dots, i b_n)$ est une base sur $\mathbb{R}$ de E . On en déduit que la dimension de E sur $\mathbb{R}$ est finie, et $\dim_{\mathbb{R}} E = 2n$.

De plus, d'après la question (2c), $\dim_{\mathbb{R}} F = \dim_{\mathbb{R}} i F$. Comme $F \cap i F = \{0\}$, F et $i F$ sont en somme directe, et par conséquent, $\dim_{\mathbb{R}} F \oplus i F = 2 \dim_{\mathbb{R}} F$.

Ainsi, puisque $F \oplus i F$ est un sous-espace de E ,

$$2 \dim_{\mathbb{R}} F = \dim_{\mathbb{R}} F \oplus i F \leq \dim_{\mathbb{R}} E = 2n, \quad \text{soit:} \quad \dim_{\mathbb{R}} F \leq n.$$

On a égalité si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}} F \oplus i F = \dim_{\mathbb{R}} E$, donc si et seulement si $F \oplus i F = E$.

4. Soit G un sous-espace de E de dimension finie. Soit n la dimension de G sur $\mathbb{C}$, et soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base sur $\mathbb{C}$ de G . Notons F le sous-espace sur $\mathbb{R}$ engendré (sur $\mathbb{R}$) par $(b_1, \dots, b_n)$. Cette famille étant libre sur $\mathbb{C}$, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$: c'est une base de F (sur $\mathbb{R}$), donc $\dim_{\mathbb{R}} F = n$. De plus, $(b_1, \dots, b_n)$ étant une base de G sur $\mathbb{C}$, $(b_1, \dots, b_n, i b_1, \dots, i b_n)$ en est une base sur $\mathbb{R}$. Ainsi, l'espace engendré sur $\mathbb{R}$ par $(i b_1, \dots, i b_n)$ est un supplémentaire de F dans G . Or, cet espace vectoriel est exactement $i F$. Ainsi, $F \oplus i F = G$.

Cet espace n'est bien sûr pas unique ; en effet, si F est un tel espace, alors $i F$ convient aussi, puisque $i(i F) = F$. D'autres contre-exemples : si $E = G = \mathbb{C}$, soit $z \in \mathbb{C}^*$, et soit $F = \mathbb{R}z$ (ainsi, F est n'importe quelle droite réelle dans le plan complexe). Alors $i F \cap F = \{0\}$, et $\mathbb{C} = F \oplus i F$. On a trouvé une infinité de sous-espaces F qui conviennent.

5. Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ quelconque.

(a) On définit des opérations sur $F \times F$ par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (a + i b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay).$$

Pour vérifier que cela définit une structure d'espace vectoriel, il faut vérifier toutes les propriétés d'un espace vectoriel (ici, ce n'est par le sous-espace vectoriel de quelque chose !) :

- Élément neutre pour la somme : $(0, 0)$. En effet, $\forall (x, y) \in F^2$, $(0, 0) + (x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y)$.
- Compatibilité avec le neutre $1 \in \mathbb{C}$:

$$\forall x, y \in F \times F, \quad 1 \cdot (x, y) = (1 + i \cdot 0) \cdot (x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = (x, y).$$

- Existence de l'inverse pour la somme : $\forall (x, y) \in F \times F$, $(-x, -y) + (x, y) = (x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$.
- La somme est associative : pour tout $(x, y, x', y', x'', y'') \in F^6$,

$$\begin{aligned} ((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') &= (x + x', y + y') + (x'', y'') = ((x + x') + x'') + ((y + y') + y'') \\ &= (x + (x' + x'')) + (y + (y' + y'')) = (x, y) + ((x', y') + (x'', y'')). \end{aligned}$$

- Le produit est associatif : pour tout $(x, y) \in F^2$, et tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$((a + i b)(c + i d))(x, y) = (ac - bd + i(bd + ad))(x, y) = ((ac - bd)x - (ad + bc)y, (ad + bc)x + (ac - bd)y),$$

$$\begin{aligned} \text{et :} \quad (a + i b)((c + i d)(x, y)) &= (a + i b)(cx - dy, dx + cy) \\ &= (a(cx - dy) - b(dx + cy), b(cx - dy) + a(dx + cy)) = ((a + i b)(c + i d))(x, y). \end{aligned}$$

- La somme est commutative : pour tout $(x, y, x', y') \in F^4$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y)$.
- Distributivité du produit sur la somme de $\mathbb{C}$:

$$((a + i b) + (c + i d))(x, y) = ((a + c) + i(b + d))(x, y) = (a + c)x - (b + d)y, (b + d)x + (a + c)y,$$

$$\begin{aligned} \text{et :} \quad (a + i b)(x, y) + (c + i d)(x, y) &= (ax - by, bx + ay) + (cx - dy, dx + cy) \\ &= ((a + c)x - (b + d)y, (b + d)x + (a + c)y). \end{aligned}$$

- Distributivité du produit sur la somme de $F \times F$: de même.

Au passage, remarquez à quel point c'est préférable de pouvoir définir un espace vectoriel comme un sous-espace d'un espace connu : il y a beaucoup moins de vérifications à faire !

- (b) Tout d'abord, montrons que F est un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de $F_{\mathbb{C}}$; pour cela, étudions la stabilité par combinaisons linéaires. Soit $X = (x, 0)$ et $Y = (y, 0)$ deux éléments de F , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda X + Y = (\lambda x + y, 0)$. Or, $\lambda x + y$ est dans F , par stabilité de F , donc $(\lambda x + y, 0) \in F$, d'après l'abus de notation précisé dans l'énoncé. Comme $(0, 0) \in F$, on en déduit que F est un sous-espace de $F_{\mathbb{C}}$. Remarquez que l'abus de notation se justifie par le fait que l'application linéaire $F \longrightarrow F$ (de l'ancien F vers le nouveau) donnée par $x \mapsto (x, 0)$ est un isomorphisme.

Soit maintenant $X = (x, 0)$ un élément de F . Alors $iX = (0, x)$, d'après la description de la loi externe. Ainsi, iF est le sous-espace sur $\mathbb{R}$ de $F_{\mathbb{C}}$ constitué des couples $(0, x)$, pour $x \in F$. En particulier, $F \cap iF = \{(0, 0)\} = \{0\}$. Par conséquent, F est un sous-espace réel de $F_{\mathbb{C}}$.

- (c) On sait déjà que F et iF sont en somme directe (question précédente). Montrons que $F + iF = F_{\mathbb{C}}$. Soit (x, y) un élément de $F_{\mathbb{C}}$. Alors $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, avec $(x, 0) \in F$, et $(0, y) \in iF$. Donc $F_{\mathbb{C}} \subset F + iF$. L'inclusion réciproque est évidente, puisque $F \subset F_{\mathbb{C}}$ et $iF \subset F_{\mathbb{C}}$.
- (d) La question telle que posée n'a pas de sens, E n'étant pas défini. On rectifie : Un sous-espace réel de $F_{\mathbb{C}}$ n'est pas forcément un sous-espace (sur $\mathbb{R}$) de F . En effet, si $F = \mathbb{R}$, alors une vérification immédiate montre que $F_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$; l'élément i correspond à $(0, 1)$. Le produit et l'addition correspondent au produit et à l'addition dans $\mathbb{C}$. On a vu plus haut que toute droite réelle de $\mathbb{C}$ est un sous-espace réel de $\mathbb{C}$. Ainsi, $iF = i\mathbb{R}$ est un sous-espace réel de $\mathbb{R}$, aussi étrange que puisse paraître la terminologie ! C'est d'ailleurs le cas pour tout F : iF est un sous-espace réel de $F_{\mathbb{C}}$, mais n'est bien sûr pas contenu dans F , sauf dans le cas où $F = \{0\}$.

6. D'après la question 4, il existe un sous-espace sur $\mathbb{R}$ de E tel que $F \oplus iF = E$. Montrons que E est isomorphe à $F_{\mathbb{C}}$. On définit l'isomorphisme

$$\varphi : F_{\mathbb{C}} = F \times F \longrightarrow E = F \oplus iF$$

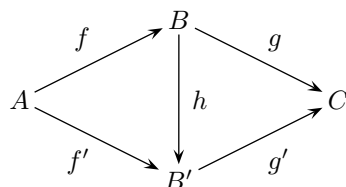
par $\varphi(x, y) = x + iy$. Cette application est clairement une bijection. En effet l'application définie pour tout $x \in F$ et $y \in iF$ par $\psi(x + y) = (x, -iy)$ en est clairement une réciproque.

Montrons que c'est un isomorphisme, c'est-à-dire que cette bijection est une application linéaire. Soit (x, y) et (x', y') deux éléments de $F \times F$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. On écrit $\lambda = a + ib$, où a et b sont deux réels. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(x, y) + (x', y')) &= \varphi(ax - by + x', bx + ay + y') = (ax - by + x') + i(bx + ay + y') \\ &= (a + ib)(x + iy) + (x' + iy') = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y'). \end{aligned}$$

Ainsi, φ est un isomorphisme de $F_{\mathbb{C}}$ sur E : E est isomorphe au complexifié de F .

Exercice 2 – Soit A, B, C et B' quatre espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit f, g, f', g' et h des applications linéaires telles que ci-dessous :



On suppose en outre que :

- $h \circ f = f'$ et $g' \circ h = g$,
- f et f' sont injectives, g et g' sont surjectives,
- $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f') = \text{Ker}(g')$.

- Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in \text{Im}(f)$, et comme $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$, on obtient $f(a) \in \text{Ker}(g)$. Ainsi, $g(f(a)) = 0$. De même, puisque $\text{Im}(f') = \text{Ker}(g')$, $g' \circ f'(a) = 0$.

2. Étude de l'injectivité de h

(a) Soit $b \in B$ tel que $h(b) = 0$. Ainsi, g' étant linéaire,

$$g' \circ h(b) = g'(0) = 0.$$

Or, par hypothèse $g' \circ h = g$, donc $g(b) = 0$.

(b) On en déduit que $b \in \text{Ker}(g)$, donc, puisque $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$, on a $b \in \text{Im}(f)$, et donc, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

(c) On a alors $f'(a) = h \circ f(a) = h(b) = 0$. Par conséquent, $a \in \text{Ker}(f')$, et comme f' est injective, $\text{Ker}(f') = \{0\}$. Ainsi, $a = 0$. On en déduit que $b = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(h) = \{0\}$, et par conséquent, h est injective.

3. Étude de la surjectivité de h .

(a) L'application g est surjective, donc $g'(b')$ dans C admet une image réciproque par g . Il existe donc $b \in B$ tel que $g(b) = g'(b')$.

(b) On a alors $g'(h(b) - b') = g'(h(b)) - g'(b')$, et comme $g' \circ h = g$, on a $g'(h(b) - b') = g(b) - g'(b') = 0$. Par conséquent, $h(b) - b' \in \text{Ker}(g')$, et comme $\text{Ker}(g') = \text{Im}(f')$, $h(b) - b' \in \text{Im}(f')$.

Soit $a \in A$ tel que $h(b) - b' = f'(a)$. Comme $f' = h \circ f$, on a $h(b) - b' = h(f(a))$, donc $h(b) - b' \in \text{Im}(h)$.

(c) On a donc $b' = h(b) - h(f(a)) = h(b - f(a))$, et donc $b' \in \text{Im}(h)$. Cela montre bien que h est surjective. Étant une application linéaire injective et surjective, h est donc un isomorphisme.

Exercice 3 –

Soit T l'application de $\mathcal{C}^0$ dans l'ensemble de toutes les fonctions qui à $f \in \mathcal{C}^0$ associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T(f))(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt.$$

1. (a) $\mathcal{C}^0$ est un sous-ensemble du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction nulle est continue, donc $0 \in \mathcal{C}^0$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $f, g \in \mathcal{C}^0$, $\lambda f + g$ est continue, donc $\lambda f + g \in \mathcal{C}^0$. Ainsi, $\mathcal{C}^0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

De même, une combinaison linéaire de fonction deux fois dérivable de dérivée seconde continue est encore deux fois dérivable de dérivée continue, et $0 \in \mathcal{C}^2$. Ainsi, $\mathcal{C}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$.

- (b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) &= \int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt = \int_0^x f(t) (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \, dt \\ &= \sin x \int_0^x \cos t f(t) \, dt - \cos x \int_0^x \sin t f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Or, pour toute fonction continue g sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x g(t) \, dt$ est dérivable de dérivée $x \mapsto g(x)$. Ainsi, $T(f)$ est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)'(x) &= \cos x \int_0^x \cos t f(t) \, dt + \sin x \cos x f(x) + \sin x \int_0^x \sin t f(t) \, dt - \cos x \sin x f(x) \\ &= \cos x \int_0^x \cos t f(t) \, dt + \sin x \int_0^x \sin t f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Ainsi, $T(f)'$ est encore dérivable, et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)''(x) &= -\sin x \int_0^x \cos t f(t) \, dt + \cos^2(x) f(x) + \cos x \int_0^x \sin t f(t) \, dt + \sin^2(x) \\ &= f(x) + \cos x \int_0^x \sin t f(t) \, dt - \sin x \int_0^x \cos t f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Comme f est continue, et les intégrales également (elles sont dérivables) ainsi que les fonctions $\sin$ et $\cos$ on en déduit que $T(f)''$ est continue. Ainsi, $T(f) \in \mathcal{C}^2$.

- (c) D'après la question précédente, T est une application de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^2$. Montrons que T est linéaire. Pour cela, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, T(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x (\lambda f(t) + g(t)) \sin(x-t) \, dt \\ &= \lambda \int_0^x f(t) \sin(x-t) \, dt + \int_0^x g(t) \sin(x-t) \, dt = \lambda T(f) + T(g).\end{aligned}$$

2. Dans la question (1b), on a obtenu, pour tout $f \in \mathcal{C}^0$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, T(f)''(x) &= f(x) + \cos x \int_0^x \sin t f(t) \, dt - \sin x \int_0^x \cos t f(t) \, dt \\ &= f(x) + \int_0^x \sin(t-x) f(t) \, dt = f(x) - T(f)(x).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $T(f) + (T(f))'' = f$.

Soit f tel que $T(f) = 0$. Alors $T(f)'' = 0$, et par conséquent, $f = T(f) + T(f)'' = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

3. Soit $K = \{g \in \mathcal{C}^2 \mid g(0) = g'(0) = 0\}$.

- (a) K est un sous-ensemble de $\mathcal{C}^2$, et la fonction nulle est dans K . De plus, soit g et h deux fonctions de K , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda g + h \in \mathcal{C}^2$, et $(\lambda g + h)(0) = \lambda g(0) + h(0) = 0$, et $(\lambda g + h)'(0) = \lambda g'(0) + h'(0) = 0$. Ainsi, $\lambda g + h \in K$.

Par conséquent, K est un sev de $\mathcal{C}^2$.

- (b) Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Alors :

$$T(f)(0) = \int_0^0 f(t) \sin(-t) \, dt = 0.$$

De plus,

$$T(f)'(0) = \cos 0 \int_0^0 \cos t f(t) \, dt + \sin 0 \int_0^0 \sin t f(t) \, dt = 0.$$

Ainsi, $T(f) \in K$. Par conséquent, $\text{Im } T \subset K$.

- (c) Soit $g \in K$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(g'')(x) = \int_0^x g''(t) \sin(x-t) \, dt.$$

Intégrons par parties, en considérant les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $t \mapsto g'(t)$ et $t \mapsto \sin(x-t)$, se dérivant en $t \mapsto g''(t)$ et $t \mapsto -\cos(x-t)$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(g'')(x) = \int_0^x g'(t) \cos(x-t) \, dt - \left[g'(t) \sin(x-t) \right]_0^x = \int_0^x g'(t) \cos(x-t) \, dt.$$

Intégrons par parties, en considérant les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto \cos(x-t)$, se dérivant en $t \mapsto g'(t)$ et $t \mapsto \sin(x-t)$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(g'')(x) = - \int_0^x g(t) \sin(x-t) \, dt + \left[g(t) \cos(x-t) \right]_0^x = - \int_0^x g(t) \sin(x-t) \, dt = -T(g)(x) + g(x).$$

Par conséquent, T étant linéaire, $T(g + g'') = T(g) + T(g'') = g$. On en déduit que tout g de K est dans l'image de T . Ainsi, $\text{Im } g = K$.

4. (a) T se restreint donc en une application linéaire de $\mathcal{C}^0$ sur K . Cette application linéaire est injective d'après la question 2, et est surjective d'après la question 3b. Il s'agit donc d'un isomorphisme.
(b) Puisque pour tout $g \in K$, $T(g + g'') = g$, on en déduit que $T^{-1}(g) = g + g''$.

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}T(s) &= \int_0^x \sin(x-t) \sin t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^x (\cos(2t-x) - \cos x) \, dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\sin(2t-x) \right]_0^x - \frac{1}{2} x \cos x \\ &= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(-x) - \frac{1}{2} x \cos x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.\end{aligned}$$

- (b) Puisque $s = T(s) + T(s)''$, il suffit de prendre $f = T(s)$, calculé dans la question précédente.