

Correction du Devoir Maison n° 8

Problème 1 – (d’après HEC 2002, option économique, environ la moitié du sujet) On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l’espace vectoriel des matrices carrées d’ordre 2. Le but de cet exercice est la résolution de l’équation matricielle $AM + MB$, d’inconnue M . Étant donné A et B deux matrices de E , on note $V_{A,B}$ le sous-ensemble de E constitué des matrices M vérifiant $AM = MB$.

On définit :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. • Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels tels que $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 = 0$, c’est-à-dire :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit :} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M = aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4$. Ainsi,

(U_1, U_2, U_3, U_4) est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Il en résulte que (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On aurait aussi pu procéder de la manière suivante. Soit l’application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad f \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Cette application est clairement linéaire et bijective, la réciproque étant g définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Ainsi, f est un isomorphisme. Il envoie donc les bases de $\mathbb{R}^4$ sur des bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or, (U_1, U_2, U_3, U_4) est l’image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il s’agit donc bien d’une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit A et B deux matrices de E , et $\varphi_{A,B}$ l’application qui à toute matrice M de E associe la matrice $AM - MB$.

- (a) Tout d’abord, $\varphi_{A,B}$ est bien une application de E dans E . Montrons qu’elle est linéaire.

Soit $M, N \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\varphi_{A,B}(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)B = \lambda(AM - MB) + (AN - NB) = \lambda\varphi_{A,B}(M) + \varphi_{A,B}(N).$$

Ainsi, $\varphi_{A,B}$ est une application linéaire de E dans lui-même : c’est donc un endomorphisme de E .

$V_{A,B}$ est l’ensemble des matrices M telles que $AM = MB$, c’est-à-dire telles que $AM - MB = 0$, ou encore $\varphi_{A,B}(M) = 0$. Ainsi, $V_{A,B} = \text{Ker}(\varphi_{A,B})$. Or, le noyau d’une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l’ensemble initial. On en déduit que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E .

- (b) Cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{U}$ la base (U_1, U_2, U_3, U_4) . Déterminons $\varphi_{A,B}(U_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

- $\varphi_{A,B}(U_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc $\varphi_{A,B}(U_1) = 2U_1 - U_3$, soit : $[\varphi_{A,B}(U_1)]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $\varphi_{A,B}(U_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Donc $\varphi_{A,B}(U_2) = -2U_1 - U_4$, soit : $[\varphi_{A,B}(U_2)]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

- $\varphi_{A,B}(U_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc $\varphi_{A,B}(U_3) = -U_1 + 2U_3$, soit : $[\varphi_{A,B}(U_3)]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- $\varphi_{A,B}(U_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Donc $\varphi_{A,B}(U_4) = -U_2 - 2U_3$, soit : $[\varphi_{A,B}(U_4)]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On en déduit la matrice de $\varphi_{A,B}$ dans la base $\mathcal{U}$:

$$[\varphi_{A,B}]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) S'il s'agit seulement de montrer l'inversibilité d'une matrice, et non de calculer l'inverse, on peut se contenter de montrer que l'application canoniquement associée est injective (d'après un résultat du cours, comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, cela implique qu'elle est un isomorphisme). Il suffit donc de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit donc $X \in \mathbb{R}^4$ tel que

$[\varphi_{A,B}]_{\mathcal{U}}X = 0$. Ainsi, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on obtient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 2y - z & = 0 \\ & - t = 0 \\ -x & + 2z - 2t = 0 \\ & - y & = 0 \end{cases}$$

Les équations 2 et 4 amènent $y = t = 0$, et on est amené à résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on sort $x = 2z$, que l'on remplace dans la première équation pour trouver $3z = 0$, d'où $z = 0$, puis $x = 0$.

Ainsi, $x = y = z = t = 0$. On en déduit que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $[\varphi_{A,B}]_{\mathcal{U}}$ est injectif, donc bijectif. Ainsi, $[\varphi_{A,B}]_{\mathcal{U}}$ est inversible. On en déduit que $\varphi_{A,B}$ est un isomorphisme, donc que son noyau est égal à $\{0\}$. Par conséquent, $V_{A,B} = \{0\}$.

3. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E . Calculons $DM - M\Delta$.

$$DM - M\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ rz & rt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & sy \\ z & st \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (1-s)y \\ (r-1)z & (r-s)t \end{pmatrix}.$$

Puisque $r \neq s$, $r \neq 1$ et $s \neq 1$, $DM - M\Delta = 0$ si et seulement si $y = z = t = 0$.

(b) Ainsi, $V_{D,\Delta}$ est un espace de dimension 1 engendré par $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, une base de $V_{D,\Delta}$ est (U_1) .

4. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a-b \neq c-d$, $a-b \neq 1$, et $c-d \neq 1$. On définit : $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$. On pose $r = a-b$ et $s = c-d$ et D et Δ comme précédemment.

(a) Soit $\text{Ker}(A - \lambda I_2) \neq \{0\}$ si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ est non inversible, si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Calculons donc ce déterminant :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \left| \begin{pmatrix} a-\lambda & 1-a \\ b & 1-b-\lambda \end{pmatrix} \right| = (a-\lambda)(1-b-\lambda) - b(1-a) \\ &= a - ab - a\lambda - \lambda + b\lambda + \lambda^2 - b + ab = \lambda^2 + (b-a-1)\lambda + a-b. \end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré admet une racine évidente $\lambda_1 = 1$. On en déduit facilement l'autre racine $\lambda_2 = a-b$ (faites tout de même rapidement la vérification !)

D'après les hypothèses de l'énoncé, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On obtient deux valeurs distinctes.

Ainsi, $\boxed{\text{Ker}(A - \lambda I_2) \neq \{0\} \text{ si et seulement si } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = a-b.}$

(b) • Déterminons une base de $\text{Ker}(A - I_2)$. Nous avons $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ b & -b \end{pmatrix}$. D'après les hypothèses de l'énoncé, cette matrice est non nulle, donc son noyau n'est pas $\mathbb{R}^2$ tout entier. Ainsi, $\dim \text{Ker}(A - I_2) < 2$. De plus, le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ d'après la question précédente. Il est donc de dimension 1. Pour en trouver une base, il suffit donc d'en trouver un vecteur non nul. On obtient un tel vecteur en cherchant une relation entre les colonnes de $A - I_2$. On a la relation $C_1 + C_2 = 0$, donc

$$(A - I_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, } \boxed{\text{une base de } \text{Ker}(A - I_2) \text{ est la famille constituée vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

• Déterminons de même une base du noyau de $A - (a-b)I_2 = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ b & 1-a \end{pmatrix}$. Par la même justification, ce noyau est de dimension 1, et on a la relation suivante entre les colonnes : $(a-1)C_1 + bC_2 = 0$,

$$\text{donc } \boxed{\text{une base de } \text{Ker}(A - (a-b)I_2) \text{ est la famille constituée du vecteur } \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}.}$$

Posons $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$, et $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$. Puisque $a-1 \neq b$ par hypothèse, les vecteurs b_1 et b_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, cette famille libre est de cardinal maximal, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit f l'application canoniquement associée à A . Alors, puisque $b_1 \in \text{Ker}(f - \text{id})$, on a $f(b_1) = b_1$, et de la même façon, $f(b_2) = (a-b)b_2$. Ainsi :

$$[f(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(b_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ a-b \end{pmatrix} \quad \text{donc:} \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{En posant } r = a-b, \text{ la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est donc } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}.}$$

- (c) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base $\mathcal{B}$ définie ci-dessus. Alors, les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs b_1 et b_2 dans la base canonique, donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

De plus, la formule de changement de base amène :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\text{b.c.}}P \quad \text{soit:} \quad \boxed{D = P^{-1}AP}.$$

- (d) Inutile de reprendre les calculs ! Le raisonnement précédent étant vrai quelle que soit la valeur de a et la valeur de b , sous la condition $a - b \neq 1$, on obtient le résultat pour la matrice B en renommant les variables c et d , sous la condition $c - d \neq 1$. Ainsi, il existe une matrice Q telle que :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & c-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = Q^{-1}BQ, \quad \text{avec } s = c - d.}$$

- (e) Soit $M \in E$.

- Supposons que $M \in V_{A,B}$. Alors $AM - MB = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} D(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)\Delta &= (P^{-1}AP)(P^{-1}MQ) - (P^{-1}MQ)(Q^{-1}BQ) \\ &= P^{-1}AMQ - P^{-1}MBQ = P^{-1}(AM - MB)Q = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$.

- Supposons que $P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$. Alors, le même calcul que plus haut amène :

$$P^{-1}(AM - MB)Q = 0,$$

et en multipliant à gauche par P et à droite par Q^{-1} , on obtient $AM - MB = 0$, donc $M \in V_{A,B}$.

Ainsi, $M \in V_{A,B}$ si et seulement si $P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}$

Il en résulte qu'on peut définir une application $\Phi : V_{A,B} \Rightarrow V_{D,\Delta}$ définie pour tout $M \in V_{A,B}$ par $\Phi(M) = P^{-1}MP$.

- Φ est linéaire. En effet, soit M et N dans $V_{A,B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi(\lambda M + N) = P^{-1}(\lambda M + N)Q = \lambda P^{-1}MQ + P^{-1}NQ = \lambda \Phi(M) + \Phi(N).$$

- Φ est bijective. Définissons en effet $\Psi : V_{D,\Delta} \rightarrow V_{A,B}$ par $\Psi(M') = PM'Q^{-1}$. Cette application est bien définie (elle est bien à valeurs dans $V_{A,B}$), car pour tout M' dans $V_{D,\Delta}$, $M' = P^{-1}\Psi(M')Q$ est élément de $V_{D,\Delta}$, ce qui est équivalent à dire, d'après le début de la question, que $\Psi(M')$ est élément de $V_{A,B}$. De plus Ψ est clairement réciproque de Φ .

Ainsi, Φ est un isomorphisme, puis Ψ est aussi un isomorphisme, de $V_{D,\Delta}$ dans $V_{A,B}$. Il envoie donc les bases de $V_{D,\Delta}$ sur des bases de $V_{A,B}$. Par conséquent, une base de $V_{A,B}$ est le 1-uplet $(\varphi(U_1))$, donc (PU_1Q^{-1}) . Calculons cette matrice. Pour commencer, calculons Q^{-1} , à l'aide du déterminant :

$$Q^{-1} = \frac{1}{d-c+1} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} PU_1Q^{-1} &= \frac{1}{d-c+1} \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d-c+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d-c+1} \begin{pmatrix} d & 1-c \\ d & 1-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En multipliant ce vecteur par $d - c + 1$ non nul, on obtient :

La famille formée uniquement de la matrice $\begin{pmatrix} d & 1-c \\ d & 1-c \end{pmatrix}$ est une base de $V_{A,B}$.

5. Dans cette question, r , s , u et v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$ et $u \neq v$. On pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

(a) On refait de même. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Nous avons à résoudre l'équation $DM + M\Delta = 0$. Or :

$$DM - M\Delta = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux & uy \\ rz & rt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} vx & sy \\ vz & st \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u-v)x & (u-s)y \\ (r-v)z & (r-s)t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M \in V_{D,\Delta}$ si et seulement si $(u-v)x = 0$, $(u-s)y = 0$, $(r-v)z = 0$ et $(r-s)t = 0$, et puisque $u \neq v$, $u \neq s$, $r \neq v$ et $r \neq s$, on obtient finalement que M appartient à $V_{D,\Delta}$ si et seulement si $x = y = z = t = 0$, donc si $M = 0$. Ainsi, $V_{D,\Delta} = \{0\}$, de base $\emptyset$.

(b) Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit

$$\text{Spec}(C) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \text{Ker}(C - \lambda I_2) \neq \{0\}\}.$$

On suppose que A et B vérifient $|\text{Spec}(A)| = |\text{Spec}(B)| = 2$, et $\text{Spec}(A) \cap \text{Spec}(B) = \emptyset$.

Ainsi, il existe des réels λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 deux à deux distincts tels que $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ et $\text{Spec}(B) = \{\lambda_3, \lambda_4\}$.

- Par définition, $\text{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$ est non réduit à $\{0\}$. Soit b_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$.
- Par définition, $\text{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$ est non réduit à $\{0\}$. Soit b_2 un vecteur non nul de $\text{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$.
- Par définition, $\text{Ker}(B - \lambda_3 I_2)$ est non réduit à $\{0\}$. Soit b_3 un vecteur non nul de $\text{Ker}(B - \lambda_3 I_2)$.
- Par définition, $\text{Ker}(B - \lambda_4 I_2)$ est non réduit à $\{0\}$. Soit b_4 un vecteur non nul de $\text{Ker}(B - \lambda_4 I_2)$.

Alors :

- $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$:
 * Il s'agit d'une famille libre. En effet, soit λ et μ deux réels tels que $\lambda b_1 + \mu b_2 = 0$. Alors, en appliquant l'application f canoniquement associée à A , et en remarquant que par définition, $f(b_1) = \lambda_1 b_1$ et $f(b_2) = \lambda_2 b_2$, on obtient :

$$\lambda \lambda_1 b_1 + \mu \lambda_2 b_2 = 0.$$

En multipliant l'identité initiale par λ_1 , on a aussi : $\lambda \lambda_1 b_1 + \mu \lambda_1 b_2 = 0$, d'où, par soustraction, $\mu(\lambda_1 - \lambda_2)b_2 = 0$, et, puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu b_2 = 0$, puis $\mu = 0$, car $b_2 \neq 0$. On en déduit que $\lambda b_1 = 0$, puis $\lambda = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre

- * C'est une famille libre de cardinal 2 dans l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.
- De même, $\mathcal{C} = (b_3, b_4)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit f et g les applications linéaires canoniquement associées à A et à B . On a $f(b_1) = \lambda_1 b_1$ et $f(b_2) = \lambda_2 b_2$, donc

$$[f(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(b_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{donc:} \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Alors P est inversible, et d'après la formule de changement de base,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = [f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP.$$

De la même façon, si Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$, Q est inversible et :

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = [g]_{\mathcal{C}} = Q^{-1}BQ.$$

Le même raisonnement qu'en (4e) montre que M appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si M appartient à $V_{D,\Delta}$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

De la même façon qu'en (4e), on en déduit alors que $V_{A,B}$ et $V_{D,\Delta}$ sont isomorphes. Or, comme les λ_i sont deux à deux distincts, on est dans les conditions d'application de la question (5a), donc $V_{D,\Delta} = \{0\}$. On en déduit que $V_{A,B} = \{0\}$

Vous remarquerez au passage que les deux matrices de la question 2 vérifient les hypothèses de cette question ; en effet, un calcul simple montre que $\text{Spec}(A) = \{0, 2\}$ et $\text{Spec}(B) = -1, 1$. Nos réponses sont donc cohérentes.

Problème 2 –

Partie préliminaire

1. D'après le théorème sur les séries exponentielles, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Ainsi, la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^x .
2. L'énoncé manque de précision. Les suites $(E_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(E_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont adjacentes qu'à partir d'un certain rang.
Puisque $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, $(E_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(E_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, donc $(E_{2n} - E_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle.
De plus, étudions la monotonie du terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \frac{n+1}{|x|}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq E(|x|)$, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$. Alors :

$$\forall n \geq \frac{E(x)}{2}, E_{2n+2} - E_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0,$$

(les signes proviennent du fait que $x \leq 0$) donc $(E_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de l'indice (en la suite initiale) $E(|x|)$. De même, $(E_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir de l'indice $E(|x|)$.

3. Donc, à partir de l'indice $E(|x|)$, deux termes consécutifs de la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ encadrent la limite e^x , donc $|E_{n+1} - E_n|$ est un majorant de l'erreur faite en approchant e^x par E_n ou E_{n+1} . Nous allons donc calculer les termes successifs de (E_n) jusqu'à ce qu'on dépasse ce seuil $E(|x|)$ d'une part (afin de pouvoir utiliser ce critère), et jusqu'à ce que la différence de deux termes consécutifs soit plus petite que l'erreur maximale voulue.

Pour calculer les termes de la suite (E_n) , on constatera que (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{x}{n+1}.$$

program exponentielle;

```
var x,err,E,u,v:real;
    n:integer;
```

```
begin
  writeln('Entrez x négatif:');
  readln(x);
  writeln('Entrez une marge d'erreur:');
  readln(err);
  u:=1;    {initialisation de u au rang 0}
  E:=1;    {initialisation de E au rang 0}
  n:=0;    {valeur du rang courant}
  repeat
    v:=u;  {sauvegarde de la valeur de u_n}
    u:=u*x/(n+1); {calcul de u_{n+1}}
    n:=n+1;
    E:=E+u;
  until
    (n > trunc(x)) and (abs(u-v)< err);
end.
```

Partie I – Exponentielle d’une matrice carrée d’ordre 3.

1. Vous pouvez montrer l’inverse en résolvant un système, ou alors utiliser la méthode du pivot de Gauss que l’on verra d’ici peu. Je présente de préférence cette méthode. Vous la comprendrez tantôt.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \text{(choix d'un meilleur pivot)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

On a trouvé une réduite de Gauss de P triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Ainsi, P est inversible. On peut continuer le calcul. On multiplie la troisième ligne par 3 pour avoir un pivot égal à 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right).$$

Ainsi, on trouve l’inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (a) \quad T &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -1 & 9 \\ -3 & 1 & -3 \\ -14 & 2 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -2 & 19 \\ -10 & 2 & -7 \\ -44 & 4 & -30 \end{pmatrix} = T. \end{aligned}$$

(b) Bonjour les calculs ! Mieux vaut être armé d’une calculatrice. On trouve :

$$T^2 = \begin{pmatrix} -32 & 16 & -24 \\ 8 & -4 & 6 \\ 48 & -24 & 36 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 3$, $T^n = T^{n-3} \cdot 0 = 0$.

(c) Soit $n \geq 3$. Alors $T^n = 0$. On en déduit :

$$A^n = (PTP^{-1})^n = PTP^{-1}PTP^{-1} \dots PTP^{-1} = PT^nP^{-1} = P0P^{-1} = 0 \quad \text{soit:} \quad A^n = 0.$$

Honnêtement, je ne vois pas pourquoi on passe par T^n , à part pour vous faire calculer. Il me semble aussi (plus !) facile de montrer directement que $A^n = 0$ pour $n \geq 3$.

$$3. \quad (a) \quad E(t)E(t') = (I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I_3 + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2) = I_3 + (t+t')A + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t'^2}{2} + tt'\right)A^2.$$

En effet, les autres termes du développement font apparaître des puissances A^k de A , avec $k \geq 3$, et sont donc nulles.

$$\text{Ainsi : } E(t)E(t') = I_3 + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2}A^2, \text{ soit } \boxed{E(t)E(t') = E(t+t')}.$$

$$(b) \quad \text{De la question précédente, on déduit : } E(t)E(-t) = E(0) = I_3.$$

$$\text{Par conséquent, } \boxed{E(t) \text{ est inversible, et son inverse est } E(-t) = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A^2.}$$

$$(c) \quad \text{De même, par une récurrence immédiate (à rédiger !): } \boxed{E(t)^n = E(nt) = I_3 + ntA + \frac{n^2t^2}{2}A^2.}$$

Partie II – Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soit B et D les matrices définies par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode :** on pose $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et on résout le système $BQ = QD$:

$$\begin{cases} -c & = & a \\ -d & = & 2b \\ 2a + 3c & = & c \\ 2b + 3d & = & 2d \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont redondantes, et les deux premières équations donnent les contraintes sur Q . On peut par exemple choisir $a = 1$ et $b = 1$, cela impose c et d :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Deuxième méthode : On interprète la relation recherchée comme un changement de base. Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B , alors D représente la matrice de f dans une certaine base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$, la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ étant P . Dans cette base, $f(b_1) = b_1$ et $f(b_2) = 2b_2$. Trouvons de tels éléments b_1 et b_2 . Pour cela, résolvons les équations $f(X) = X$ et $f(X) = 2X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Résolution de $f(X) = X$: le système à résoudre est : $\begin{cases} -y = x \\ 2x + 3y = y \end{cases}$

La seconde équation est redondante ; l'espace des solutions est engendré par $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Résolution de $f(X) = 2X$: le système à résoudre est : $\begin{cases} -y = 2x \\ 2x + 3y = 2y \end{cases}$

La seconde équation est redondante ; l'espace des solutions est engendré par $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La famille (b_1, b_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, la matrice de f est D . La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la même matrice Q que celle trouvée par la méthode précédente ; d'après les formules de changement de base, on a donc : $D = Q^{-1}BQ$.

La formule d'inversion des matrices 2×2 donne immédiatement :

$$\boxed{Q^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

2. On en déduit la valeur de B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B^k = QD^kQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^k & 1 - 2^k \\ -2 + 2^{k+1} & -1 + 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = E_1 + 2^k E_2$, où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(tB)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(t)^k}{k!} E_1 + \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} E_2.$$

On en déduit les expressions de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ en considérant les coefficients de cette matrice :

$$\begin{aligned} a_n(t) &= 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{2t^k}{k!} \\ b_n(t) &= -2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{2t^k}{k!} \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{2t^k}{k!} \\ d_n(t) &= -\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{2t^k}{k!} \end{aligned}$$

4. D'après le théorème des séries exponentielles, $\sum \frac{t^k}{k!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$; de même, $\sum \frac{(2t)^k}{k!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$. Ainsi, en passant à la limite dans les expressions ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) &= 2e^t - e^{2t} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) &= -2e^t + 2e^{2t} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) &= e^t - e^{2t} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) &= -e^t + 2e^{2t} \end{aligned}$$

5. (a) On a :

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} = e^t E_1 + e^{2t} E_2,$$

où E_1 et E_2 sont les matrices décrites ci-dessus.

(b) On a déjà calculé E_1 et E_2 . Effectuons leurs produits :

$$E_1 E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et de même $E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule également E_1^2 et E_2^2 qui nous seront utiles pour la question suivante :

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = E_1 \quad \text{et} \quad E_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = E_2.$$

- (c) Comme dans la première partie, on suspecte (n'oubliez pas que c'est l'exponentielle) que $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$. Calculons donc :

$$\begin{aligned} E(t)E(-t) &= (e^t E_1 + e^{2t} E_2)(e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2) \\ &= e^t e^{-t} E_1^2 + e^t e^{-2t} E_1 E_2 + e^{-t} e^{2t} E_2 E_1 + e^{2t} e^{-2t} E_2^2 \\ &= E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Les matrices $E(t)$ et $E(-t)$ étant carrées, cela suffit à prouver qu'elles sont inversibles, et inverses l'une de l'autre.