

Correction du Devoir Maison n° 9

Problème – (Matrices productives) (extrait de EM Lyon 2004)

Partie I – Étude d'exemples

1. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est selon toute évidence positive. De plus,

$$AU = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{donc:} \quad U - AU = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Ainsi, il existe une matrice U de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $U \geq 0$, et $U - AU > 0$. On en déduit que A est productive.

2. B est bien une matrice positive. Montrons donc que pour toute matrice positive $P \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la matrice $P - BP$ n'est pas strictement positive.

Soit donc $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, où $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. On a alors :

$$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y + z \\ 2x + 3z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice colonne n'est pas strictement positive puisque son dernier coefficient est nul.

Ainsi, il n'existe pas de $P \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ positive tel que $P - BP$ soit strictement positive :

B n'est pas une matrice productive.

Partie II – Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit M et X deux matrices positives, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ respectivement. Soit $Y = MX$. On note $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par définition du produit matriciel, on a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Or, par hypothèse, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} \geq 0$, et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j \geq 0$. Tous les termes de la somme ci-dessus sont donc positifs. On en déduit que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i \geq 0.$$

Cela signifie bien que Y est positive, donc que MX est positive.

2. Réciproquement, supposons que pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Considérons en particulier $X = e_i$ le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (toutes les coordonnées nulles sauf la i -ème égale à 1). Alors, par définition du produit matriciel, $MX = C_i$, où C_i est la i -ème colonne de M . X étant positive, par l'hypothèse qu'on s'est donnée, C_i est aussi positive. On en conclut qu'en faisant varier i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient la positivité de toutes les colonnes de M , donc la positivité de M .

Partie III – Caractérisation des matrices productives

1. (a) Puisque A est positive, ainsi que P , d'après la partie précédente AP est positive. Ainsi, $P > AP \geq 0$, donc tous les coefficients de P sont strictement positifs, donc $\boxed{P > 0}$.
- (b) On a $X - AX \geq 0$, donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq 0,$$

donc en particulier, pour $i = k$:

$$0 \leq x_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = cp_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j \cdot \frac{x_j}{p_j}.$$

or, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{x_j}{p_j} \geq \frac{x_k}{p_k}$, par définition de k , donc, les $a_{k,j}$ étant tous positifs,

$$cp_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j \cdot \frac{x_j}{p_j} \leq cp_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j \cdot \frac{x_k}{p_k} = c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j \right).$$

On en déduit que $\boxed{c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j \right) \geq 0}$.

On reconnaît dans la parenthèse la k -ième coordonnée de $P - AP$ qui est une matrice positive, pas hypothèse. Ainsi, le contenu de la parenthèse est positif, et on en déduit que $\boxed{c \geq 0}$.

Par conséquent, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{x_i}{p_i} \geq c \geq 0$, et comme $p_i \geq 0$, on obtient $x_i \geq 0$. Ainsi,

$\boxed{X \text{ est positive.}}$

- (c) Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.

- On a $X = AX$, donc $X \geq AX$. Ainsi, d'après la question précédente, $X \geq 0$.
- On a $-X = A(-X)$, donc $-X \geq A(-X)$. Ainsi, d'après la question précédente, $-X \geq 0$, puis $0 \geq X$.

Les coefficients de X sont donc à la fois tous positifs et tous négatifs. Par conséquent, ils sont tous nuls et $\boxed{X = 0}$.

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $I_n - A$. Alors X est dans le noyau de f si et seulement si $X - AX = 0$, donc ssi $AX = X$, donc ssi $X = 0$, d'après la question qui précède. Ainsi, $\text{Ker } f = \{0\}$. Il en résulte que f est injective, et, étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, f est donc bijective. Sa matrice $\boxed{I_n - A \text{ est donc inversible.}}$

- (d) Soit X une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Y = (I_n - A)^{-1}X$. On a alors $(I_n - A)Y = X$, soit $Y - AY = X \geq 0$. D'après la question III-1b, on a alors $Y \geq 0$.

Ainsi, pour toute matrice positive X , $(I_n - A)^{-1}X$ est positive, et d'après la caractérisation des matrices positives donnée dans la partie II, on en déduit que $\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est une matrice positive.}}$

2. On a $V = (I_n - B)^{-1}U$, donc $V - BV = U$. Or, $U > 0$, donc $V - BV > 0$. Par définition, B étant également positive par hypothèse, on en déduit que $\boxed{B \text{ est productive.}}$

3. On déduit des questions 1d et 2 la caractérisation suivante :

La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est productive si et seulement si :

- (i) elle est positive.
- (ii) $I_n - A$ est inversible.
- (iii) $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

4. Application : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.

On a :

$$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + M - 2M^2 = I_n.$$

De même $(I_n + 2M)(I_n - M) = I_n$. Ainsi, $I_n - M$ est inversible, d'inverse donné par :

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M.$$

Or, $I_n \geq 0$ et $2M \geq 0$, donc $I_n + 2M \geq 0$.

Les trois conditions énoncées dans la question précédente étant satisfaites, M est productive.

Exercice – (d'après ESC 2004 option technologique, un peu arrangé)

Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Puissances de la matrice A

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ est l'ensemble des solutions du système $(A - \lambda I_3)X = 0$. Effectuons donc un pivot de Gauss sur la matrice $A - \lambda I_3$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} - \lambda & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 - \lambda & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ -15 - 6\lambda & 18 & 9 \\ -3 & 6 & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (5 + 2\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ 0 & 2(\lambda + 1)(2\lambda - 1) & -6 - 6\lambda \\ 0 & 2 + 2\lambda & -2 - 2\lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ 0 & 1 + \lambda & -(1 + \lambda) \\ 0 & (1 + \lambda)(2\lambda - 1) & -3(1 + \lambda) \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - (2\lambda - 1)L_2 \\ \longrightarrow & \begin{pmatrix} -3 & 4 - 2\lambda & 3 \\ 0 & 1 + \lambda & -(1 + \lambda) \\ 0 & 0 & 2(1 + \lambda)(2 - \lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Ainsi, si $\lambda \notin \{-1, 2\}$, une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, donc inversible. Ainsi, $A - \lambda I_3$ est inversible, puis $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \{0\}$.

- Si $\lambda = -1$, la matrice obtenue par la méthode du pivot est $M = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit g canoniquement associée à M .

Comme M est une réduite de Gauss de $A + I_n$, $\text{Ker } g = \text{Ker}(f + \text{id})$. On peut déjà dire que, M étant de rang 1, d'après le théorème du rang ($\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie!), la dimension de ce noyau est 2. Déterminons-en une base.

Les solutions du système en (x, y, z) défini par M sont déterminés de manière unique par les valeurs de y et z , autrement dit, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Ker } g & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On trouve une base de $\text{Ker } g$ en considérant l'image réciproque d'une base de $\mathbb{R}^2$, par exemple la base canonique. On trouve facilement, en considérant l'équation $-3x + 6y + 3z = 0$ fournie par M :

$$\varphi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, une base de $\text{Ker}(f + \text{id})$ est $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Si $\lambda = 2$, la matrice obtenue à l'issue du pivot est $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En divisant les lignes par

3, on obtient une réduite de Gauss $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $A - 2I_3$. Soit g l'endomorphisme canoniquement associé à M .

Réolvons $MX = 0$. La troisième inconnue détermine entièrement les autres, ainsi

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Ker } g &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto z \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Une base de $\text{Ker } g$ est donc donnée par l'image réciproque d'une base de $\mathbb{R}$, par exemple (1). Or,

$$\varphi^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Ker}(f - 2\text{id}) = \text{Ker } g = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque cette famille est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre, donc que son rang est 3. Pour cela il suffit de montrer que le rang de la matrice P de la famille est 3, donc que cette matrice est inversible, ce que l'on fait à l'aide de la méthode du pivot.

Nous serons intéressés plus tard par le calcul de l'inverse de P . Je fais donc mon pivot simultanément sur I_n afin d'obtenir ultérieurement l'expression de P^{-1} (après m'être assuré au brouillon que P était bien inversible)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ici, on peut conclure que P est inversible, puisqu'une réduite de Gauss est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. On termine le calcul de l'inverse en effectuant les dernières opérations : $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$ et $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3$:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Ainsi, } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible, et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez votre calcul en faisant le produit $P \cdot P^{-1}$ ou $P^{-1} \cdot P$. Cela permet de détecter d'éventuelles erreurs de calcul

On en déduit que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Notons b_1 , b_2 et b_3 ces trois vecteurs. Comme b_1 et b_2 sont des éléments de $\text{Ker}(f + \text{id})$, on a $f(b_1) = -b_1$ et $f(b_2) = -b_2$. De même, b_3 est un élément de $\text{Ker}(f - 2\text{id})$, donc $f(b_3) = 2b_3$. On en déduit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{B}$ est donc une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

- (b) On a répondu à cette question au cours de la question précédente. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, et les formules de changement de base donnent la relation souhaitée :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } D = P^{-1}AP.$$

- (c) On en déduit que $A = PDP^{-1}$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = P(DP^{-1}P)^{n-1}DP^{-1} = PD^{n-1}DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Or, D étant diagonale, ses puissances successives sont immédiates à calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(-1)^n & (-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ 0 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2^{n+1} & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérifiez rapidement que cette formule convient pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Suites « arithmético-géométriques » dans $\mathbb{R}^3$.

On définit les trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$, et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3. \end{cases}$$

On pose $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.

- (b) On sait déjà que $I_3 - A$ est inversible, car 1 n'est pas valeur propre de A (voir calculs de $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$). Soit $M = 2(I_3 - A)$. Calculons l'inverse de M par la méthode du pivot.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow 3L_2 - 7L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 10L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 + 6L_3 \end{array} \\
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & -20 & 0 & 9 & -8 & -3 \\ 0 & -20 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 30 & 0 & 0 & 12 & -9 & -9 \\ 0 & -20 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & 6 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{2}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_3 \end{array} \\
&\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & 8 & -6 & -6 \\ 0 & 20 & 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 20 & 6 & -12 & -2 \end{array} \right) \\
&\text{Ainsi, } M^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 6 & -12 & -2 \end{pmatrix}, \text{ donc}
\end{aligned}$$

$$(I_3 - A)^{-1} = 2M^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 6 & -12 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) On cherche un vecteur U tel que $U = AU + B$, donc tel que $(I_3 - A)U = B$. Ainsi :

$$U = (I_3 - A)^{-1}B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 6 & -12 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{soit: } U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encore une fois, prenez le temps de vérifier rapidement que l'on a bien l'identité voulue $U = AU + B$.

(d) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - U$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = X_{n+1} - U = AX_n + B - U = AX_n + B - (AU + B) = A(X_n - U) = AY_n.$$

Par une récurrence immédiate, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = A^n Y_0, \quad \text{puis: } X_n = Y_n + U = A^n Y_0 + U = A^n(X_0 - U) + U.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2^{n+1} & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2^{n+1} & 2^n - (-1)^n \\ -(2^n - (-1)^n) & 2(2^n - (-1)^n) & 2^n + (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n \\ -(2^n - (-1)^n) \\ -(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n \\ -(2^n - (-1)^n) + 2 \\ -(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vérifiez la cohérence de la formule obtenue pour $n = 0$. Nous avons donc explicité les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1)^n - 2^n \\ -(2^n - (-1)^n) + 2 \\ -(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix}.$$