

Probabilités 1 – Corrections

Exercice 2 –

1. $A \cap \overline{C}$
2. $A \cap B \cap \overline{C}$: l'homme a plus de 40 ans, mais pas sa femme, qui est plus jeune (remarquez que la dernière information, apportée par B est redondante, ce qui signifie que $A \cap \overline{C} \subset B$).

$A - (A \cap B)$: l'homme a plus de 40 ans, et est plus jeune que sa femme.

$A \cup \overline{B} \cup C$: l'homme ou la femme a plus de 40 ans, ou alors l'homme est plus jeune que la femme. En d'autres termes, si l'homme est plus âgé que la femme, alors l'un des deux (et dans ce cas, c'est le cas forcément pour l'homme, mais éventuellement aussi pour la femme) a plus de 40 ans.

Exercice 3 – Soit A et B deux événements. On note $A \Delta B$ l'événement consistant à dire que exactement un des deux événements A et B a lieu. Il s'agit de la *différence symétrique*.

1. $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$.
2. $(A \Delta B) \cup (A \Delta \overline{B}) \subset \Omega$ est évident.
Soit $x \in \Omega$. Alors, supposons que $x \notin A \Delta B$. On a donc :
 - soit $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$, mais $x \notin A \cap \overline{B}$, soit $x \in A \Delta \overline{B}$;
 - soit $x \notin A \cup B$, donc $x \notin B$ et $x \notin A$, donc $x \in \overline{B}$ (et donc $x \in \overline{B} \cup A$), mais aussi $x \notin A \cap \overline{B}$, d'où $x \in A \Delta \overline{B}$.

On en déduit que $\Omega \subset (A \Delta B) \cup (A \Delta \overline{B})$.

D'après le procédé de double-inclusion, on en déduit l'égalité.

3. Soit $x \in A \Delta (B \cup C)$. Alors si x n'est pas dans A , il est dans B ou C . Donc x est dans A , B ou C . De plus, il ne peut pas être dans $A \cap B$, car $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$, et x n'est pas dans cet ensemble par définition de $A \Delta (B \cup C)$. De même x ne peut pas être à la fois dans A et dans C . Ainsi, $x \in A \Delta B \cup A \Delta C$. L'inclusion suivante est toujours réalisée : $A \Delta (B \cup C) \subset (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$.

Soit $x \in (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$. Alors x est dans A ou B (mais pas dans les deux), ou x est dans A ou C (mais pas dans les deux). Donc, si x n'est pas dans A , il est dans B ou C , donc dans $B \cup C$. Ainsi, x est dans A ou dans $B \cup C$.

Peut-il être dans ces deux ensembles en même temps ? A priori oui. Dire par exemple que x est dans $A \Delta B$ n'empêche pas x d'être à la fois dans A et dans C , si A et C ont des points communs qui ne sont pas dans B : ainsi, un tel point x sera dans A mais pas dans B , donc dans $A \Delta B$, mais comme il est dans $A \cap (B \cup C)$, il ne peut pas être dans $A \Delta (B \cup C)$. Ainsi, une condition nécessaire est $A \cap C \subset A \cap B$, et de même en inversant le rôle de B et C : $A \cap B \subset A \cap C$. Par conséquent, $A \cap B = A \cap C$ est une condition nécessaire.

Montrons qu'il s'agit d'une condition suffisante. Supposons qu'elle soit vérifiée. Alors

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \cup (A \Delta C) &= ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cup C) \setminus (A \cap B)) \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) = (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap (B \cup C)) = A \Delta (B \cup C). \end{aligned}$$

Exercice 9 – Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable fini ou dénombrable. On dit qu'un événement $A \in \mathcal{T}$ est minimal si les seuls événements contenus dans A sont $\emptyset$ et A .

1. Soit E_ω l'ensemble des événements de $\mathcal{T}$ contenant ω . Notons $M = \bigcap_{A \in E_\omega} A$.

Cette intersection est non vide, puisque $\omega \in E$.

Justifions d'abord que M est un élément de $\mathcal{T}$, ce qui n'est pas évident a priori, car l'intersection n'a aucune raison d'être dénombrable. Mais on peut se ramener à une intersection dénombrable, grâce au fait que Ω est dénombrable.

En effet, pour tout $x \in \Omega \setminus M$, puisque $x \notin \bigcap_{A \in E} A$, il existe $A \in E$ tel que $x \notin A$. Notons un tel ensemble A_x . Alors,

$$M = \bigcap_{x \in \Omega \setminus M} A_x.$$

En effet :

- l'inclusion directe est immédiate du fait que cette intersection comprend des termes qui sont tous des facteurs de l'intersection définissant M .
- L'inclusion réciproque découle du fait que pour tout $y \in \Omega \setminus M$, $x \notin A_y$, donc $y \notin \bigcap_{x \in \Omega \setminus M} A_x$. La contraposée donne bien : pour tout $y \in \bigcap_{x \in \Omega \setminus M} A_x$, $y \in M$, d'où l'inclusion réciproque.

Or, Ω étant au plus dénombrable, il en est de même de $\Omega - M$. Ainsi, l'intersection comporte au plus une infinité dénombrable de termes, tous dans $\mathcal{T}$. Par stabilité d'une tribu par intersections au plus dénombrables, on en déduit que $\bigcap_{x \in \Omega \setminus M} A_x$ est dans $\mathcal{T}$, donc que M est dans $\mathcal{T}$.

M contient bien ω puisque chaque facteur de l'intersection contient ω . Montrons que M est minimal. Soit $N \subset M$ un ensemble dans $\mathcal{T}$. Alors :

- si $\omega \in N$, alors N est un facteur dans l'intersection définissant M , donc $M \subset N$; et comme par définition, $N \subset M$, on en déduit que $M = N$;
- si $\omega \notin N$, alors $\omega \in M \setminus N$. Or, $M \setminus N$ est un élément de $\mathcal{T}$ aussi, contenant ω et contenu dans M . Le même argument que ci-dessus montre que $M \setminus N = M$, puis que $N = \emptyset$.

Ainsi, les seuls éléments de la tribu inclus dans M sont M et $\emptyset$. C'est bien dire que M est minimal.

M est unique vérifiant cette propriété. En effet, soit N vérifiant également cette propriété. Alors $\omega \in M$ et $\omega \in N$, donc $\omega \in M \cap N$. Or, $M \cap N$ est un élément de $\mathcal{T}$, non vide, contenu à la fois dans M et dans N . Par minimalité de M et N , on en déduit que :

$$M = M \cap N = N.$$

D'où $M = N$, ce qui prouve l'unicité de M .

2. Considérons, pour tout $\omega \in \Omega$, M_ω l'unique événement minimal contenant ω . Considérons la famille $(M_\omega)_{\omega \in \Omega}$. Cette famille est constituée d'événements deux à deux soit égaux soit incompatibles. En effet, soit ω et ω' dans Ω . Alors

$$M_\omega \cap M_{\omega'} \subset M_\omega \quad \text{et} \quad M_\omega \cap M_{\omega'} \subset M_{\omega'},$$

donc, par minimalité de M_ω et de $M_{\omega'}$, soit $M_\omega \cap M_{\omega'} = \emptyset$, soit $M_\omega \cap M_{\omega'} \neq \emptyset$, mais dans ce cas $M_\omega \cap M_{\omega'} = M_\omega$ et $M_\omega \cap M_{\omega'} = M_{\omega'}$, d'où $M_\omega = M_{\omega'}$.

Ainsi, la famille $(M_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est constituée d'un certain nombre de copies de certains ensembles deux à deux incompatibles. De plus, puisque pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \in M_\omega$, l'élément ω est dans l'union de ces ensembles. Ainsi, $\bigcup_{\omega \in \Omega} M_\omega = \Omega$.

En ne gardant qu'une copie des chaque ensemble dans cette famille (donc en supprimant les répétitions), on obtient une famille plus petite, donc tous les événements sont minimaux, deux à deux incompatibles, et dont l'union fait Ω . C'est donc un système complet minimal. Cette famille est de cardinal plus petit que le cardinal de la famille $(M_\omega)_{\omega \in \Omega}$, donc que le cardinal de Ω . Ainsi, ce système complet est au plus dénombrable.

L'unicité provient de l'unicité de l'événement minimale contenant ω . En effet, cela impose que l'unique part d'un système complet minimal qui contienne ω est M_ω . Cela décrit entièrement le système complet.

3. Je corrige l'énoncé : je suppose que le système complet est fini ou dénombrable. En revanche, je ne mets pas de condition sur Ω . Notons $\mathcal{C}$ le système complet. Alors, d'après le cours,

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, J \subset I \right\}$$

La paramétrisation par $J \subset I$ est injective (deux paramètres ne donnent pas le même événement), donc le cardinal de $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ est égal à celui de $\mathcal{P}(I)$, l'ensemble des indices (fini de même valeur, ou dénombrable, ou non dénombrable suivant le cas).

4. Distinguons deux cas.

- Si Ω est fini ou dénombrable, soit $\mathcal{T}$ une tribu quelconque sur Ω , et $\mathcal{C} = (A_i)_{i \in I}$ l'unique système complet minimal trouvé dans la question 2 (I est au plus dénombrable). Alors montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{C})$:
* Puisque tout élément de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{T}$, la tribu engendrée également, donc $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}$.

- * Soit $A \in \mathcal{T}$. Alors, pour tout $i \in I$, $A \cap A_i = \emptyset$ ou $A \cap A_i = A_i$, du fait de la minimalité de A_i . Soit J l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $A \cap A_i = A_i$. On obtient alors $A = \bigcup_{i \in J} A_i$, ce qui prouve que

$A \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$. Ainsi, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Ainsi $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par un système complet $\mathcal{C} = (A_i)_{i \in I}$. D'après la question précédente, $\mathcal{T}$ est de cardinal égal à celui de $\mathcal{P}(I)$, c'est à dire :

- * de cardinal fini si I est fini ;
- * de même cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si I est dénombrable. Or, on a admis dans le cours que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable.

Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{P}(I)$ ne peut pas être dénombrable (au sens strict).

- Si Ω est infini non dénombrable, soit $\mathcal{T}$ une tribu quelconque sur Ω . Supposons qu'elle soit finie ou dénombrable. Alors, on peut refaire le même argument que précédemment (intersection des événements contenant ω pour obtenir un unique événement minimal, puis obtention d'un unique système complet). Dans ce cas, on obtient directement la dénombrabilité (au plus) de l'intersection $\bigcup_{A|\omega \in A} A$ du fait que

l'intersection est prise sur un sous-ensemble de $\mathcal{T}$, contenant donc un nombre au plus dénombrable de termes. Ainsi, l'argument sur la dénombrabilité de Ω devient inutile.

Ainsi, comme précédemment, $\mathcal{T}$ est engendré par un système complet $\mathcal{C} = (A_i)_{i \in I}$. Ce système est au plus dénombrable, car composé d'éléments deux à deux distincts de $\mathcal{T}$ qui est lui-même au plus dénombrable. Donc $\mathcal{T}$ est du cardinal de $\mathcal{P}(I)$, donc à nouveau, soit fini, soit infini non dénombrable.

Ainsi, dans tous les cas, il est impossible que $\mathcal{T}$ soit dénombrable.

Exercice 10 – Cet exercice a déjà été traité en partie dans le cours.

- (a)
 - $\Omega \in \mathcal{T}$ car Ω est cofini (son complémentaire est vide).
 - Soit $A \in \mathcal{T}$. Si A est fini, alors $\overline{A}$ est cofini, et réciproquement. Dans tous les cas, $\overline{A}$ est encore un élément de $\mathcal{T}$.
 - Soit A et B dans $\mathcal{T}$:
 - * si A ou B est cofini, disons A , alors $\overline{A \cup B} \subset \overline{A}$, donc $\overline{A \cup B}$ est fini, donc $A \cup B$ est cofini.
 - * si A et B sont tous les deux finis, alors $A \cup B$ est fini aussi.

Dans tous les cas, $A \cup B$ est fini. D'où la stabilité de $\mathcal{T}$ par union.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est bien une algèbre.

Montrons qu'il ne s'agit pas d'une σ -algèbre. Pour cela, commençons par considérer un sous-ensemble dénombrable A de Ω (c'est possible : il suffit de construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts : on prend n'importe quoi pour u_0 , puis n'importe quoi sauf u_0 pour u_1 etc. ; on a toujours le choix, sinon cela signifierait que Ω était en fait fini, ce qui rentre en contradiction avec nos hypothèses).

Alors $\overline{A}$ est infini, sinon Ω serait l'union de deux ensembles au plus dénombrables, donc serait au plus dénombrable. On obtient même que $\overline{A}$ est non dénombrable, mais nous n'en avons pas besoin ici.

Ainsi, A n'est ni fini ni cofini, donc $A \notin \mathcal{T}$. Mais :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Ceci est une union dénombrable (puisque A l'est) d'éléments de $\mathcal{T}$ (des singletons sont finis !). Ainsi, $\mathcal{T}$ n'est pas stable par union dénombrable. Il en résulte que $\mathcal{T}$ n'est pas une σ -algèbre.

- (b) Soit $\mathcal{T}'$ la tribu engendrée par les épreuves.
 - Tout d'abord, les épreuves sont dans $\mathcal{T}$, donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.
 - Soit un événement $A \in \mathcal{T}$. Alors :
 - * si A est fini, $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$. Cette union étant finie, $A \in \mathcal{T}'$;
 - * si A est cofini, alors, par le point précédent, $\overline{A} \in \mathcal{T}'$ car $\overline{A}$ est fini, puis, par stabilité d'une algèbre par complémentation, $A \in \mathcal{T}'$.

Ainsi, $\mathcal{T}_{cal} \subset \mathcal{T}'$.

On en déduit que $\mathcal{T}$ est l'algèbre engendrée par les épreuves.

- (c) On définit une application $P : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} P(A) = 0 & \text{si } A \text{ est fini} \\ P(A) = 1 & \text{si } A \text{ est cofini.} \end{cases}$$

Cela définit P sur tous les éléments de $\mathcal{T}$ et de manière non équivoque, puisqu'un ensemble A ne peut pas être à la fois fini et cofini (cela impliquerait que Ω soit fini). Ainsi, P est bien définie.

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

- si tous les A_i sont finis, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_i) = 0$, et de plus, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fini, donc :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

- S'il existe i_0 tel que A_{i_0} soit cofini, alors, les événements étant deux à deux incompatibles, $\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} A_i \subset \overline{A_{i_0}}$. Donc cet ensemble est fini, donc chacun des événements de cette union est fini. Ainsi, pour tout $i \neq i_0$, $P(A_i) = 0$ et $P(A_{i_0}) = 1$. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Par ailleurs, $A_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, et A_{i_0} étant cofini, c'est donc également le cas de $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Ainsi :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

2. Soit $\mathcal{T}'$ l'ensemble des parties dénombrables ou codénombrables (où dénombrable = fini ou infini dénombrable),

- (a) $\mathcal{T}'$ est une tribu : De même que pour $\mathcal{T}$, en se souvenant qu'une union d'un nombre dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable (pour la stabilité par union dénombrable).

Soit $\mathcal{T}''$ la tribu engendrée par les singletons. Comme précédemment, $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}'$, car les singletons sont dans $\mathcal{T}'$.

De plus, soit $A \in \mathcal{T}'$:

- si A est dénombrable, $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$, cette union étant dénombrable ; donc $A \in \mathcal{T}''$;
- si A est codénombrable, $\overline{A} \in \mathcal{T}''$, donc $A \in \mathcal{T}''$.

Ainsi, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}''$.

De ces deux inclusions, on déduit que $\mathcal{T}'$ est la tribu engendrée par les singletons.

Les ensembles finis ou cofinis sont aussi dénombrables ou codénombrables au sens de l'énoncé, donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Enfin, du fait de l'existence d'ensembles dénombrables qui ne soient ni finis ni cofinis (on a déjà justifié et utilisé cette existence), $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$.

- (b) P' est bien définie du fait qu'un ensemble A ne peut pas être à la fois dénombrable et codénombrable : cela supposerait que Ω serait l'union de deux ensembles dénombrables, donc serait lui-même dénombrable, ce qui contredit les hypothèses.

Montrons que P' est une mesure de probabilité :

- P' est bien à valeurs dans $[0, 1]$;
- Ω étant codénombrable, $P(\Omega) = 1$;
- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}'$, deux à deux incompatibles. Alors :
 - * si les A_i sont tous dénombrables, leur union (en nombre dénombrable) est aussi dénombrable, et par conséquent :

$$\sum_{i \in I} P'(A_i) = \sum_{i \in I} 0 = 0 = P'\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

- * S'il existe i_0 tel que A_{i_0} est codénombrable, alors, puisque $\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i \subset \overline{A_{i_0}}$, les A_i , $i \neq i_0$, sont tous dénombrables, donc de probabilité nulle. Ainsi :

$$\sum_{i \in I} P'(A_i) = P'(A_{i_0}) = 1.$$

Mais, $A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, donc $\bigcup_{i \in I} A_i$ est également codénombrable, donc :

$$P'\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1 = \sum_{i \in I} P'(A_i).$$

D'où la σ -additivité.

Ainsi, P' est une mesure de probabilité.